GELIJK EN ONGELIJK IN DE ANALYSE

Comparationis ſigna in ſequentibus vſurpanda.

AEqualitatis $=$ *vt a* $=$ *b. ſignificet a æqualem ipſi b.*
Maioritatis $>$ *vt a* $>$ *b. ſignificet a maiorem quam b.*
Minoritatis $<$ *vt a* $<$ *b ſignificet a minorem quam b.*

door

Tom H. Koornwinder

GELIJK EN ONGELIJK IN DE ANALYSE

REDE

uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar in de Analyse in de Faculteit der Wiskunde en Informatica van de Universiteit van Amsterdam op vrijdag 19 februari 1993

door

dr. Tom H. Koornwinder

INHOUD

Dit boekje is gedrukt bij de Stichting Mathematisch Centrum te Amsterdam.

De reproductie op de voorkaft is ontleend aan T. Harriot, *Artis analyticae praxis ad aequationes resolvendas*, ed. W. Warner, 1631.

Mijnheer de Rector Magnificus,
Zeer gewaardeerde toehoorders,

Het wiskundige review-tijdschrift *Mathematical Reviews* hanteert een classificatiesysteem dat de wiskunde eerst opdeelt in 60 hoofdnummers en vervolgens elk van die hoofdnummers weer zeer fijn onderverdeelt. Elke leerstoel binnen onze vakgroep wiskunde heeft een of meer van deze hoofdnummers als zijn jachtgebied. Tot de Analyse, dus mijn leerstoel, behoren liefst 19 van de 60 hoofdnummers.[1]

Het is nog niet zoveel jaren geleden dat er hier op de universiteit vijf hoogleraren analyse waren, en daarnaast nog twee hoogleraren mathematische fysica die ook van huis uit analyticus waren.[2] Thans is er precies één, degene die hier tot u staat te oreren. Het is uiteraard ondoenlijk voor deze ene persoon om het hele terrein van de analyse te bestrijken, noch actief noch passief. Als ik goed probeer te interpreteren wat de benoemingscommissies voor de drie recent benoemde hoogleraren meetkunde, analyse en mathematische fysica beoogden, dan denk ik dat het ook helemaal niet hun bedoeling was om de meest centraal in zijn vak staande persoon te benoemen, maar veel meer een lichte rotatie te maken in de driehoek meetkunde - analyse - mathematische fysica, of misschien wel in de vierhoek waar algebra aan is toegevoegd, zo dat de benoemde personen hun gebrek aan centraliteit in hun eigen discipline compenseren met een stuk actieve kennis van een naburige discipline.

Ik wil u dit half uur iets over de Analyse vertellen en over mijn eigen positie daarbinnen.

Het woord Analyse

Een eerste vraag is de betekenis van het woord analyse. U kent deze term allen uit het dagelijks leven. In de krant is de nieuwsanalyse verhelderend, op het schoolpracticum hebt u chemische stoffen geanalyseerd, u ziet op tegen iemand met een analytisch denkvermogen, en sommigen van u zijn misschien wel in psycho-analyse geweest. U bent wellicht bevreesd dat een hoogleraar in de Analyse aan analysedwang zal lijden. Volgens het *Van Dale Groot Woordenboek der Nederlandse taal* is analysedwang de ziekelijke gewoonte om zich het hoe en waarom af te vragen bij al wat men doet, beleeft of voelt. Ik stootte op dit curieuze woord toen ik eens in Van Dale opzocht hoe deze autoriteit het wiskundige begrip analyse omschrijft, en daar de volgende definitie vond: "Het systematisch onderzoeken en oplossen van een probleem, waarbij men het gestelde tot een bekende waarheid terugbrengt."[3] De definitie bevredigde me niet. Dan geef ik verre de voorkeur aan de definitie van analyse in het bescheiden boekje *Prisma van de wiskunde*.[4] Ik citeer: "Analyse is het deel van de wiskunde waarin de begrippen functie, limiet en convergentie een belangrijke rol spelen."

Van Dale's definitie sluit wel aan bij de oorsprong van het begrip analyse in de Griekse wiskunde. Dit gaat waarschijnlijk tot Plato terug. De betekenis van het woord heeft sindsdien een merkwaardige evolutie doorgemaakt. Ik wil deze ontwikkeling met u doorlopen.

Pappus. We beginnen in de vierde eeuw na Christus met Pappus van Alexandrië. Deze legt ons de begrippen analyse en synthese uit, zoals die in het bijzonder in de Griekse meetkunde werden toegepast.[5] Bij de *analyse* van een wiskundig probleem, zo verklaart hij, gaat men uit van het gezochte resultaat en werkt vervolgens terug langs een keten van gevolgtrekkingen tot men bij een reeds bekend resultaat is aangeland. Bij de *synthese* daarentegen werkt men in tegenovergestelde richting: van het bekende resultaat naar het gezochte resultaat.[6] [7]

Viète. In de zestiende eeuw is er een hernieuwde belangstelling voor de meetkunde van de oude Grieken, en met name voor de analytische methode. De Franse wiskundige Viète bracht deze methode speciaal in verband met het vertalen van een meetkundig probleem in een algebraïsch, en het vervolgens oplossen van het algebraïsch probleem.[8]

Stel men heeft een vergelijking met een onbekende verkregen. Volgens Viète is de analytische methode van oplossing dan de volgende. Men werkt met de onbekende alsof het al een echt getal is, manipuleert in een aantal logische stappen de vergelijking, totdat er een of meer concrete waarden voor de onbekende uitkomen.[9]

Viète ging het woord analyse niet alleen als naam voor een werkmethode binnen de algebra gebruiken, maar hij ging ook het hele vak Algebra met de naam Analyse aanduiden.[10] In de daaropvolgende periode werden de woorden algebra en analyse als synoniemen gebruikt.[11]

Newton. Een volgende stap in de ontwikkeling van het begrip analyse had plaats met de invoering van de differentiaal- en integraalrekening, de zogenaamde *calculus*, door Newton en Leibniz in de tweede helft van de zeventiende eeuw. De motivatie tot de calculus werd gegeven door een aantal belangrijke problemen uit de meetkunde en de mechanica, ondermeer het bepalen van de raaklijn aan een kromme en de lengte van een kromme.[12]

In het werk *De Analysi* van Newton uit 1669 vinden we de volgende sleutelpassage:[13] "En wat de gewone Analyse ook uitvoert door middel van vergelijkingen met een eindig aantal termen, kan deze nieuwe methode altijd uitvoeren d.m.v. oneindige vergelijkingen. Daarom heb ik er geen probleem mee gehad om hier ook de naam Analyse aan te verbinden. Want de redeneringen in het ene zijn niet minder zeker dan in het andere; noch zijn de vergelijkingen minder exact."[14]

De ontwikkelingsgang is dus dat Newton, in navolging van Viète, de algebra met analyse aanduidde (de zogenaamde gewone Analyse), maar dan opmerkt dat ook uitdrukkingen waarin oneindige reeksen voorkomen nog een algebraïsch karakter hebben en gemanipuleerd kunnen worden met bewerkingen van algebraïsche aard. Daarom noemt hij de wiskunde van dit soort uitdrukkingen óók analyse.

U hoorde al in de definitie van analyse uit het Prismaboekje dat het begrip functie daar centraal staat. Laten we bekijken hoe de begrippen *analytisch* en *functie* in onderlinge wisselwerking evolueerden.

Gregory. Het woord functie kwam slechts geleidelijk in zwang,[15] maar bij Gregory vinden we in 1667, dus nog voor het geciteerde werk van Newton, de term *analytisch samengestelde grootheid*. Hij definieerde dit als een grootheid samengesteld uit andere grootheden door optelling, aftrekking, vermenigvuldiging, deling en worteltrekking.[16] Bijvoorbeeld $2 + 3z + 4z^2$ is een analytisch samengestelde grootheid. Bij iedere gegeven waarde van z vinden we een waarde voor $2 + 3z + 4z^2$. In Gregory's definitie staat analytisch weer synoniem met algebraïsch.

Euler. In 1748 stelde de grote wiskundige Euler het begrip *functie* van z gelijk met het begrip *analytische uitdrukking* in z, waarbij de betekenis van analytisch op een soortgelijke manier was uitgerekt als bij Newton. Bij de opbouw van de analytische uitdrukking liet hij namelijk naast de bovengenoemde vijf algebraïsche standaardoperaties ook oneindige optellingen toe, wat leidde tot de zogenaamde machtreeksen.[17]

Een *machtreeks* is een uitdrukking in de variabele z die te schrijven is als $A + Bz + Cz^2 + Dz^3$ en zo oneindig voortgaande, waarbij we dus termen met willekeurig hoge machten van z tegenkomen. Als de reeks ergens afbreekt dan spreken we van een *polynoom* of *veelterm*. Een machtreeks is dus een oneindige veelterm. Tot op grote hoogte kunnen oneindige veeltermen net zo algebraïsch worden gemanipuleerd als eindige veeltermen, zoals Newton reeds opmerkte.

Euler's opvatting van functie evolueerde verrassend snel, vooral vanwege een discussie verband houdende met de trillende snaar.[18] Zeven jaar na zijn eerste definitie schreef hij in 1755: "Als sommige grootheden zo afhangen van andere grootheden dat, als de laatste veranderd worden, de eerste ook veranderingen ondergaan, dan worden de eerste grootheden functies van de laatste genoemd. Deze afhankelijkheid is van de breedst mogelijke aard en omvat iedere methode waardoor een grootheid uit andere bepaald kan worden."[19]

Fourier. De analytische afhankelijkheid werd hier dus geheel losgelaten. Het was dit soort definitie van functie dat geleidelijk veld won en dat door Fourier in 1821 wel heel kort als volgt werd weergegeven: "In het algemeen stelt de functie $f(x)$ een rij waarden of ordinaten voor, elk waarvan willekeurig is."[20] Hiermee is ons moderne functiebegrip bereikt. U moet zich realiseren wat een enorme verruiming van het blikveld dit betekende. Want, voor een 18e eeuwse wiskundige was het zo dat functies die niet door een analytische uitdrukking gegeven werden, eenvoudig niet bestonden, omdat hij zich de mogelijkheid van hun bestaan nooit gerealiseerd had.[21]

Functieklassen. Wat is de analyticus nu met deze nieuwe rijkdom aan functies gaan doen? De volledig algemene functie is te ongestructureerd om voor hem nog interessant te zijn. Hij beperkt zich tot bepaalde functieklassen. Ik noem drie types van zulke klassen.

Allereerst zijn er de functies uit Euler's eerste definitie. Essentieel zijn dit de functies die door convergente machtreeksen zijn gegeven. Zij worden nu *analytische functies* genoemd en bestudeerd in het vak met de naam *functietheorie*. Dit vak is een parel binnen de Analyse en is een van de hoofdonderwerpen binnen de aan mijn leerstoel verbonden sectie.[22]

Ten tweede beschouwt men analytische uitdrukkingen waarin het begrip analytisch nog veel verder is opgerekt. Er zijn nog steeds constructievoorschriften, maar deze kunnen enorm ingewikkeld worden, zoals bijvoorbeeld bij de wiskundige Lebesgue rond 1900.[23]

Bij het derde type functieklasse is er geen constructievoorschrift meer, maar is er een bepaalde eigenschap waaraan een willekeurig gegeven functie moet voldoen, wil zij tot die functieklasse behoren.[24] Met dit type functieklasse wordt thans het meest gewerkt. Het is moderne analyse bij uitstek, maar ironisch genoeg zonder analytische uitdrukkingen. In deze functieklassen hebben functies hun individualiteit verloren. Het gaat meer om structurele eigenschappen van de hele klasse en om operatoren van de ene klasse naar de andere. Het betreffende deelterrein van de Analyse heet *functionaalanalyse*.

Café Epsilon. Ik vertelde u dat functies in de 18e eeuw vooral machtreeksen waren, waar men op algebraïsche en formele manier mee rekende. De urgentie voor een meer rigoureuze definitie van begrippen als limiet en continuïteit ontstond pas in de 19e eeuw met de evolutie van het functiebegrip. Dit vond zijn afronding bij Weierstrass, die definities gaf met behulp van de zogenaamde ε- en δ-ongelijkheden.[25] Zo ontstond een zeer karakteristieke redeneermethode in de Analyse, die ik wil aanduiden als de analyse van café Epsilon. Hiermee verwijs ik naar het gelijknamige café op de Place Jussieu in Parijs, net voor de poort van het complex van de universiteiten Paris VI en Paris VII.

Algebraïsering en meetkunde. *Waarde toehoorders*, We hebben een lange weg gevolgd in de ontwikkelingsgang van het woord analyse. We zijn begonnen met Griekse meetkunde en hebben het nu alleen nog maar over functies. In de geschiedenisboeken van de wiskunde vallen ons telkens trefwoorden op als algebraïsering van de analyse, aritmetisering van de analyse en rigoureus maken van de analyse, waarbij het zich verwijderen van de meetkunde de keerzijde is. Dit wordt opgemerkt in verband met Viète, met Descartes en Fermat, met Newton en Leibniz, met Euler en met Weierstrass.[26] Men zou bijna denken dat na zo'n langdurige trend er geen meetkundebeoefening meer overblijft, zeker niet in verband met de analyse.[27] In de oratie van collega Van Strien[28] van zoëven hebt u al gehoord dat dit gelukkig niet het geval is.

Ontdekken of uitvinden

Ik wil nu een intermezzo inlassen over een misschien wat afgezaagd thema, dat toch telkens weer opduikt in bespiegelingen over de wiskunde, namelijk de vraag of de wiskundige zijn resultaten ontdekt danwel uitvindt. De eerste opvatting wordt toegeschreven aan Plato.[29] Als de wiskundige een resultaat ontdekt dan heeft dat altijd al bestaan, onafhankelijk van de mens. Als de wiskundige een resultaat uitvindt dan is het een beetje toevallig dat het juist dit resultaat is en dat het juist deze vorm aanneemt. Bij een wat andere samenloop van omstandigheden zou er misschien, binnen het enorme scala van potentiële correcte wiskundige resultaten, iets heel anders tot stand gekomen zijn.

Het bezwaar van deze bespiegelingen is dat men nooit kan bewijzen of iets ontdekt of uitgevonden is. Zelfs al men het wel kon bewijzen dan zou het niet geoorloofd zijn om er een waarde-oordeel aan toe te kennen, bijv. om ontdekte wiskunde betere wiskunde te noemen dan uitgevonden wiskunde. Toch blijft het me intrigeren, vooral ook omdat ik in mijn eigen onderzoek momenten heb gehad dat ik echt het gevoel had rond te lopen in de ideeënwereld van Plato en dingen te ontdekken die buiten mijzelf altijd al bestaan hadden. In zo'n situatie wist ik ook heel precies van te voren waar ik naar zocht en dat het gezochte zonder twijfel aanwezig moest zijn. Ik denk dat veel collega's soortgelijke ervaringen hebben gehad.[30]

Plato-getal. Laat ik het er op wagen om bij wijze van spel een nieuwe variabele in te voeren, het zogenaamde Plato-getal. Hoe hoger het Plato-getal van een wiskunde-resultaat, des te plausibeler is het dat dit resultaat ontdekt is en niet uitgevonden. Een mogelijke meting van het Plato-getal is het met elkaar vergelijken van tien ongeveer even geavanceerde beschavingen in het heelal die nooit contact met elkaar hebben gehad. Het Plato-getal van een wiskunderesultaat is het aantal beschavingen waar dit zelfde resultaat in essentieel dezelfde vorm bekend is.

Formules

Dames en Heren, Voor de leek behoren wiskundige formules tot het meest herkenbare deel van de wiskunde, maar ook tot het meest afschrikwekkende deel ervan. De uitgevers zijn zich zo bewust van de formule-angst bij het lekenpubliek dat zij in populaire teksten over bijvoorbeeld natuurkunde of sterrenkunde de formules zoveel mogelijk bannen en hoogstens toelaten in een appendix. Maar ook onder de professionele wiskundigen is er een niet gering percentage dat weinig enthousiasme voor formules kan opbrengen, zeker als ze wat gecompliceerder worden. [31] [32] Er zijn twee recente technische ontwikkelingen, waardoor formules het tij mee hebben.

TeX. De eerste is het computerprogramma TeX van Donald Knuth [33] voor het typesetten van wiskundige teksten. De invoerfile voor dit programma is van het type platte tekst. Hierin kan men de meest gecompliceerde wiskundige formules [34] brengen, nadat ze volgens eenvoudige regels als platte tekst gecodeerd zijn. Met de huidige snelle werkstations verkrijgt men uitvoer in een paar seconden, als preview op het scherm of geprint op papier. TeX wordt nu bijna universeel door wiskundigen gebruikt. Het is hierdoor veel gemakkelijker geworden om met collega's op afstand onderzoek te doen, ook als dit ingewikkelde notatie en grotere formules behelst. Men wisselt eenvoudig per electronic mail TeX-files uit. TeX is nu samen met het Engels de lingua franca onder de wiskundigen.

Computeralgebra. De tweede technische ontwikkeling is de beschikbaarheid van programma's voor formulemanipulatie op de computer, zoals Maple en Mathematica. [35] Deze programma's rekenen met wiskundige formules op een formele, dus niet numerieke manier. Vergeleken met de klassieke methode van pen en papier of bord en krijt hebben ze het drievoudige voordeel van snelheid, het aankunnen van complexere berekeningen en het maken van minder fouten.

Dit betekent echter niet dat de balans binnen de wiskunde nu doorslaat naar de formulegebruikers. Evenzeer hebben bijvoorbeeld de meetkundigen veel meer computerondersteuning gekregen door de recente technische ontwikkelingen.

Ongeformuleerdheid. De huidige betrekkelijk slechte reputatie van wiskundeformules, zowel bij leken als bij professionelen, zou ik in analogie met het begrip ongecijferdheid van Paulos [36] *ongeformuleerdheid* willen noemen.

Ik vlei me niet met de gedachte dat ik de meeste leken of wiskundecollega's in dit opzicht volledig zal kunnen omturnen. Toch hoop ik iets te kunnen bijdragen aan de toename van de geformuleerdheid door telkens te benadrukken dat formules, althans de goede formules, niet slechts doodse dingen zijn, maar een significante structuur hebben, waarin allerlei componenten hun eigen betekenis, associatie en interpretatie hebben.

Het allermooiste is het als zo'n interpretatie gegeven kan worden binnen een hele andere context. In mijn eigen specialisme denk ik daarbij aan een interpretatie in verband met orthogonale stelsels of met representaties van Lie-groepen of quantumgroepen.[37] Maar men kan ook denken aan de natuurkunde, de combinatoriek, de getallentheorie, enzovoorts.

Gelijk en ongelijk

Als een mogelijke ingang tot het gigantische terrein van de analyse bespreek ik nu met u de begrippen *gelijk* en *ongelijk*.[38]

Een groot deel van de analyse-literatuur is gevat in formules. Veel van die formules hebben de vorm van een gelijkheid of een ongelijkheid.[39] In de analyse worden ongelijkheden veel meer gebruikt dan gelijkheden, vooral in tussenredeneringen en bewijzen. Dit is niet verwonderlijk. Analyse is door en door verweven met de reële getallen. De axioma's van de reële getallen[40] zijn een samenstel van algebraïsche axioma's, nl. die van een lichaam, en ordeningsaxioma's waarin de ongelijkheden een rol spelen. Hier bovenop komt dan nog een volledigheidsaxioma, dat niet zonder ongelijkheden geformuleerd kan worden en dat in café Epsilon een ereplaats aan de muur achter de tap heeft.

Gelijkheden. Het is de ongelijkheidsrelatie die de analyse meer doet zijn dan algebra. Toch hebben veel eindresultaten in de analyse weer de vorm van een gelijkheid. Als men kijkt naar de formules binnen de analyse die een naam hebben gekregen of die in een compendium zijn opgenomen, dan zijn daaronder veel meer gelijkheden dan ongelijkheden.[41] Een gelijkheid zal door de minste verstoring al geen gelijkheid meer zijn. Als we de triviale gelijkheden, de tautologieën even buiten beschouwing laten, dan is iedere gelijkheid eigenlijk een klein wonder. Juist door haar onwaarschijnlijkheid zal zo'n gelijkheid een hoge informatiewaarde hebben, een grote toepasbaarheid binnen en buiten de wiskunde, en bovendien een intrinsieke schoonheid.[42] Men zou ook kunnen zeggen dat gelijkheden een hoog Plato-getal hebben.

Ongelijkheden. Met ongelijkheden is het heel anders. Zij zijn veel minder gevoelig voor verstoringen, waardoor het minder nauw luistert als men in een lid van de ongelijkheid voor het gemak of voor het mooi iets verandert. Dit geldt in het bijzonder voor positieve constante factoren in ongelijkheden. Dan is men doorgaans tevreden met de informatie dat de ongelijkheid opgaat voor een zekere invulling van de constante. Men hoeft deze constante verder niet te kennen en noemt hem gewoon C. De ene C hoeft de andere niet te zijn. Ongelijkheden zijn veel meer verbonden met het schatten, met het krijgen van een gevoel voor de orde van grootte of de mate van groei. Ongelijkheden zijn veel meer uitgevonden dan ontdekt.

Soms zegt men van een ongelijkheid dat zij scherp is. Dan is de ongelijkheid in een of andere zin zo zuinig mogelijk. Men kent dan bijvoorbeeld de kleinst mogelijke waarde voor de positieve constante C zo dat de ongelijkheid nog geldt.[43] De ongelijkheden die gecanoniseerd worden en een naam krijgen, zijn doorgaans scherpe ongelijkheden.[44] [45] Zij hebben een hoger Plato-getal. De doorsnee-ongelijkheid is echter niet scherp, maar toch onmisbaar als gereedschap bij het werk van de analyticus. Juist door de keuzevrijheid die zulke ongelijkheden openlaten, is er veel feeling en ervaring voor nodig om de ongelijkheden te kiezen die tot het gewenste doel voeren.

Het verschil tussen gelijkheden en ongelijkheden ligt wel gecompliceerder dan tot nu toe geschetst. Wanneer de analyticus in een bewijs ongelijkheden gebruikt, is dit doorgaans niet een simpele keten van ongelijkheden, maar is het geheel gevat in een ingewikkeld logisch keurslijf van existentiële en universele quantoren werkend op de variabelen die nog in de ongelijkheden voorkomen. Prototypes hiervan vindt men in de definities van limiet van een rij, reeks of functie, zoals geformuleerd door Weierstrass.[46] [47] [48] Het is de analyse van café Epsilon.

Heisenberg-ongelijkheid. Een van de mooiste ongelijkheden vind ik de *Heisenberg-ongelijkheid*. Ik bespaar u de wiskundige formulering,[49] maar ik noem twee belangrijke praktijksituaties waarin deze ongelijkheid een rol speelt. De eerste is in de quantummechanica, waar de ongelijkheid zegt dat het onmogelijk is om met willekeurig grote precisie tegelijk de plaats en de snelheid (eigenlijk de impuls) van een deeltje te meten. Hoe preciezer men de plaats meet, des te vager blijft men over de snelheid, en omgekeerd.

De tweede praktijksituatie is in de analyse van een geluidssignaal. De Heisenberg-ongelijkheid zegt hier dat het onmogelijk is om met willekeurig grote precisie tegelijk het tijdstip van een toon en de frequentie van een toon te meten. Dus als een toon maar heel kort klinkt, zeg een 32ste noot, dan kan men maar bij benadering haar toonhoogte vaststellen, en omgekeerd.

Als men niettemin het verloop van de bijdragen van de verschillende toonhoogtes tot een geluidssignaal in de loop van de tijd wil weergeven, dan zal men er dus niet aan kunnen ontkomen iets minder precies te zijn. Toch willen we graag een geluidssignaal op die manier weergeven, zo horen we het geluid nu eenmaal en zo schrijven we het in notenschrift in de partituur. De Fouriertransformatie alleen schiet hier als wiskundig gereedschap tekort. Verschillende andere technieken zijn in de loop van de tijd ontwikkeld. Nog steeds zeer geruchtmakend is de techniek van de wavelettransformatie, die in de jaren tachtig ontwikkeld werd.[50]

Eigen onderzoeksterrein

Zeer geacht publiek, Laat ik u tot slot wat vertellen over mijn eigen onderzoeksterrein. De sleutelwoorden zijn speciale functies, orthogonaliteit, harmonische analyse, Lie-groepen, q-deformaties en quantumgroepen.

Speciale functies. Om te beginnen speciale functies. Een *speciale functie* is een functie met een eigen individualiteit, zo expliciet mogelijk gekarakteriseerd en meestal ook een naam dragend en door een eigen letter aangeduid. Uiteraard moet de functie voldoende interessant zijn om speciaal genoemd te worden. Zeer speciaal zijn de elementaire functies zoals de exponentiële en de trigonometrische. Onder de oudst bekende niet-elementaire speciale functies vinden we de Gammafunctie, Besselfunctie, hypergeometrische functie en Legendre-polynomen.[51] Bij de Besselfunctie en de Legendre-polynomen was er sprake van motivatie vanuit de natuurkunde, terwijl de Gammafunctie en hypergeometrische functie meer ontstonden door interne wiskundige ontwikkeling. Later, vooral door de methode van separatie van variabelen in de partiële differentiaalvergelijkingen van de mathematische fysica, kwamen er veel meer fysisch gemotiveerde speciale functies bij.[52] Ook beschouwde men speciale functies die van belang zijn voor de getallentheorie.[53]

Orthogonale stelsels. De Legendre-polynomen zijn een prototype van speciale functies die een orthogonaal stelsel vormen. Orthogonaliteit of loodrechtheid is in dit verband een directe generalisatie van het meetkundige begrip loodrechtheid in het platte vlak of in de drie-dimensionale ruimte. Maar we werken nu in ruimtes opgebouwd uit functies, die bovendien van veel hogere dimensie zijn, vaak van oneindige dimensie. Zoals ik u al zei, wordt een functie van x in de moderne opvatting beschreven door voor iedere x de functiewaarde voor te schrijven. Met behulp van een orthogonaal stelsel in een functieruimte kunnen we een willekeurige functie uit die ruimte op een tweede, heel andere manier beschrijven.[54] Door zo'n schrijfwijze kunnen andere aspecten van de functie worden belicht. Deze tak van wiskunde heet *Fourier-analyse*, of algemener *harmonische analyse*.

Groepen. Nu breng ik het begrip groep in het spel; dit behoort niet strikt tot de analyse. Bij het woord *groep* kunt u het beste denken aan *symmetriegroep*. Dat is de verzameling van alle congruentietransformaties die een zeker object, bijvoorbeeld een vierkant of cirkel, op zichzelf overvoeren. Twee symmetrietransformaties na elkaar geven weer zo'n transformatie, maar het kan verschil uitmaken voor het resultaat in welke volgorde de twee transformaties na elkaar worden uitgevoerd. Een groep kan discreet zijn, zoals de eindig veel symmetrieën van het vierkant, of continu, zoals de oneindig veel draaiingen van de cirkel. In het laatste geval spreken we van een *Lie-groep*, naar de Noorse wiskundige Lie. Binnen de klasse van alle

Lie-groepen is er een zeer mooie deelklasse die bestaat uit de *enkelvoudige* Lie-groepen.[55] Ik ken aan deze deelklasse een hoog Plato-getal toe.

Speciale functies en groepentheorie. Met functieruimtes op een Lie-groep kan men nu ook weer harmonische analyse bedrijven, waarbij de structuur van de onderliggende groep een belangrijke rol speelt. Er kunnen verbanden gelegd worden tussen harmonische analyse op Lie-groepen en harmonische analyse met orthogonale stelsels van speciale functies.[56] Beide soorten harmonische analyse hebben soms nieuwe dynamiek gekregen als gevolg van deze interactie.[57]

q-Deformaties. Het mooiste onderwerp heb ik voor het laatst bewaard. Dat is q. De filosofie van q is dat we een wiskundige uitdrukking vervormen door er volgens bepaalde voorschriften het symbool q in te plaatsen. Bijvoorbeeld, 2 wordt vervangen door $1+q$, 3 door $1+q+q^2$ en meer algemeen een getal a door $1-q^a$ gedeeld door $1-q$. U ziet dat we het oorspronkelijke getal terugkrijgen als we $q=1$ stellen. Dit procédé, dat hier wat simplistisch is geschetst, leidt tot bijzonder interessante *q-analoga van speciale functies*.[58] Veel hiervan was al in de vorige eeuw bekend, maar de interesse herleefde in de jaren zeventig en leidde tot de ontdekking van de orthogonale familie van *Askey-Wilson-polynomen*.[59]

Quantumgroepen. De jaren tachtig brachten ons, zeer spectaculair, de quantumgroepen. Men kwam tot de ontdekking dat de bovengeschetste q-deformatie ook bij Lie-groepen kan worden toegepast. Het idee is dat alle structuur van een groep opgeslagen ligt in de ruimte van functies op die groep. Als je bijvoorbeeld twee operaties in een groep niet zondermeer mag verwisselen, dan kun je die informatie ook in de functieruimte terugvinden. Echter, met functies in een functieruimte kun je nog iets anders doen: je kunt ze puntsgewijs met elkaar vermenigvuldigen. Bij zo'n vermenigvuldiging is het natuurlijk niet van belang in welke volgorde de factoren staan. Als ik nu spreek over een q-deformatie van de groep dan bedoel ik in wezen een q-deformatie van de functieruimte, en wel zo dat de volgorde van factoren bij de puntsgewijze vermenigvuldiging er ook toe gaat doen. Men heeft nu, voor elke enkelvoudige Lie-groep, door q-deformatie een enkelvoudige quantumgroep kunnen construeren.[60] Het wonder is dat de q-deformaties van de groepen ook weer corresponderen met de q-deformaties van speciale functies. In het bijzonder was ik enige jaren geleden in staat om de Askey-Wilson-polynomen met een quantumgroep in verband te brengen.[61]

De q-deformaties van speciale functies en van Lie-groepen vormen een nieuw soort algebraïsering van de analyse. Dit levert een nieuwe manier om resultaten te bewijzen in het klassieke geval waar q gelijk is aan 1. Men formuleert het analoge probleem in het q-geval, geeft daat een meer algebraïsch bewijs en leidt vervolgens, door de limiet te nemen voor q gaat naar 1, het klassieke geval hieruit af. Soms betekent deze omweg een beduidende vereenvoudiging vergeleken met eerdere bewijzen.[62]

Men kan ook het q-geval direct als model voor een fysische realiteit gaan gebruiken.[63] Misschien leven we wel in een q-wereld. De toekomst moet leren of deze ontwikkeling doorzet of van beperkt nut blijft.

Nawoord

Zeer gewaardeerde toehoorders, Aan het eind van mijn oratie gekomen dank ik het College van Bestuur voor mijn benoeming en het in mij gestelde vertrouwen. De taak waarvoor ik mij gesteld zie is niet gering, daar hoef ik niet over uit te weiden. Laat ik de hoop uitspreken dat wij als wiskundigen er u telkens weer van kunnen overtuigen dat onze stokoude discipline nog springlevend is en, minder gevoelig voor de waan van de tijd, als een van de hoekstenen voor deze universiteit kan fungeren.

Ook wil ik al diegenen bedanken die invloed hebben gehad op mijn wetenschappelijke ontwikkeling. Slechts enkele personen en groepen wil ik hier met name noemen.

Marita,
Dat van twee op de wetenschap gerichte huwelijkspartners er een succesvoller is geweest, komt niet door een verschil in talent. Om de dank te uiten die ik aan jou verschuldigd ben voor het nu bereikte is een ander soort geformuleerdheid nodig.

Vader,
Wat een voorrecht is het dat u, op zo'n hoge leeftijd, deze dag hier kunt meemaken.

Dick Askey,
Op een voor mij zeer gunstig moment bracht je je sabbatical op het Mathematisch Centrum door en zette mij wetenschappelijk op de rails.

Curatoren en directie van het Mathematisch Centrum en leden van de afdeling AM,
Een lange periode heb ik bij u doorgebracht. Nu ik het drukke leven op de universiteit heb meegemaakt, kijk ik op mijn CWI-jaren terug als een paradijselijke situatie voor het doen van ongestoord onderzoek. Voor de afdeling AM is het thans een periode van zwaar weer. Ik hoop dat zij een voortrekkersrol binnen de Nederlandse wiskunde kan blijven vervullen.

Allen die ik in het verleden adviseerde of nog steeds adviseer bij hun promotie-onderzoek,
Ik denk dat jullie mijn wetenschappelijke ontwikkeling minstens zoveel gestimuleerd hebben als ik tot die van jullie heb bijgedragen.

Leden van de Faculteit der Wiskunde en Informatica, in het bijzonder van de Vakgroep Wiskunde,
Nog niet zo lang vertoef ik in uw midden, maar vanaf het begin heb ik mij volledig bij u thuis gevoeld. Ik stel de vriendschappelijke collegiale sfeer zeer op prijs.

Wiskunde-collega's uit het land, behorend tot het Stieltjes-instituut, het MRI, of welke onderzoeksschool in oprichting dan ook,
Met velen van u heb ik al lang samengewerkt, in het bijzonder in het landelijk project Lie-groepen en in de landelijke activiteiten op het gebied van de speciale functies. Ik hoop dat de opdeling in onderzoeksscholen niet zal leiden tot kunstmatige barrières, ook niet bij het tweede fase-onderwijs.

Allen die gebruik maken van de Analyse,
Toepassers van de wiskunde kunnen moeilijk om de Analyse heen. Mijn invalshoek ligt aan de zuivere kant, maar ik sta open voor uw problemen.

Dames en Heren Studenten,
Wiskunde is een van de mooiste vakken om te studeren, maar het is geen eenvoudig vak. U bent niet optimaal met de studie bezig als u alleen maar de stof schools tot u neemt en de vraagstukken mechanisch oefent. Ik roep u op om u voortdurend nieuwsgierig op te stellen en om zelf te proberen de soms droog lijkende materie speels te herordenen. Op zo'n wijze hoop ik nog vele plezierige onderwijsuren met u door te brengen.

Ik heb gezegd.

NOTEN

1. Zie [44]. Tot de analyse reken ik de hoofdnummers 22, 26, 28, 30–35, 39–47 en 49. Nummer 22 (Lie-groepen) bevat ook algebra- en meetkundecomponenten. Anderzijds zijn er hoofdnummers bij de meetkunde (53, 58) en bij de mathematische fysica die analyse-componenten bevatten.

2. Voor het academisch jaar 1983–84 staan in de studiegids [55, pp. W6–W8] D. van Dulst, H. Jager, J. Korevaar, C. G. Lekkerkerker en H. van Rossum vermeld als hoogleraren behorend tot de vakgroep Analyse en Analytische Getaltheorie, terwijl D. W. Bresters, E. M. de Jager en H. A. Lauwerier vermeld staan als hoogleraren behorend tot de vakgroep Mathematische Fysica. Gedurende dat jaar was Bresters echter rector magnificus.

3. Zie [10]. In de inleiding [10, deel 1, p. xiii] wordt enig excuus gegeven voor het feit dat de omschrijving van wetenschappelijke termen niet altijd volledig en precies is. Overigens schreef de redactie van Van Dale mij dat de omschrijvingen van wiskundige termen voor een volgende editie door een deskundige zullen worden herzien.

4. Zie [52].

5. Boek VII van Pappus' *Wiskundige Collectie* (Gr. *Synagoge*) bevat een samenvatting van een verzameling Griekse wiskundige werken bekend staande onder de naam *Schatkamer van de Analyse* (Gr. *Analnomenos Topos*), zie [6, p. 210], [28, Vol. II, p. 399ff]. Het begin van dit boek VII bevat een uiteenzetting over analyse en synthese, zie [30, Vol. II, pp. 634–636] voor de originele tekst en [28, Vol. II, pp. 400–401], [29, Vol. 1, pp. 138–139], [42, p. 322] voor vertalingen. Andere Griekse bronnen over analyse en synthese zijn te vinden bij Proclus en Diogenes Laertius (cf. [28, Vol. I, p. 291] en [33, pp. 44–45]) en in een geïnterpoleerde tekst in boek XIII van de Elementen van Euclides, zie [29, Vol. I, p. 138; Vol. III, p. 442], [42, p. 321].

6. In de meeste aan ons overgeleverde Griekse werken wordt de synthetische methode gebruikt. Deze geeft weinig idee hoe men aan het bewijs is gekomen, daarvoor is de analytische manier veel geschikter. Veel van de oude Griekse werken die de analytische methode hanteren en die zijn samengevat in Pappus' Schatkamer van de Analyse, zijn echter verloren gegaan (cf. [6, p. 210]).

7. Het is in Pappus' beschrijving van het begrip analyse onduidelijk in welke richting de implicaties in de keten van gevolgtrekkingen gaan. Hij lijkt zelfs twee definities van analyse te geven die elkaar wat dit betreft tegenspreken. Volgens Mahoney [42] is het stuk tekst met de tweede definitie corrupt en bedoelt Pappus in de eerste definitie in feite dat elke gevolgtrekking in de keten een logische equivalentie is (zie ook [29, Vol. I, pp. 139–140]). In de Griekse meetkunde is meestal (maar niet altijd) sprake van logische

equivalenties en dan wordt de synthese overbodig als de analyse eenmaal is gegeven.

8. Viète zet zijn nieuwe interpretatie van de analytische methode uiteen in het begin van zijn *Inleiding tot de analytische kunst* [59, p. 1]. Zie Mahoney [43, p. 28ff] voor een Engelse vertaling en uitvoerig commentaar.

9. Door de aard van de algebraïsche redeneringen was iedere logische stap in de analytische methode een logische equivalentie en liet Viète daarom de synthese altijd achterwege, zie [43, pp. 46–47].

10. Zie [43, pp. 31–32, 351], [33, p. 323] over de voorkeur van Petrus Ramus, Viète en Descartes voor het woord analyse boven het woord algebra.

11. Dit is bijv. het geval in de 18e eeuwse *Encyclopédie* van d'Alembert, cf. [33, p. 323]. In het vak *analytische meetkunde*, tot ontwikkeling gebracht door Fermat en Descartes, wordt analytisch nog steeds als synoniem voor algebraïsch gebruikt. Dit vak behelst eigenlijk coördinatenmeetkunde. Het moet niet verward worden met de moderne algebraïsche meetkunde, cf. [33, p. 323].

12. Twee andere problemen die als motivatie voor de calculus dienden waren het bepalen van het maximum en het minimum van een "functie" en het bepalen van de snelheid en versnelling van een deeltje op ieder moment wanneer zijn positie op ieder moment gegeven is, zie [33, pp. 342–343]. Kenmerkend bij de calculus is dat men met grootheden werkt die willekeurig klein of groot worden (toen sprak men van oneindig klein of groot).

13. Zie [50, pp. 240–243]. Voorafgaand aan deze passage had Newton voorbeelden gegeven van het termsgewijs integreren van oneindige reeksen.

14. De hier geuite zekerheid heeft Newton al gerelativeerd in de inleiding tot *De Analysi*, zie [50, pp. 206–207], waar hij zegt dat hij zijn methode slechts kort verklaart en niet precies bewijst.

15. Het woord functie in wiskundige context werd voor het eerst door Leibniz gebruikt in 1673, maar het woord had daar nog de betekenis van "te verrichten taak" (door een deel van een figuur), zie Youschkevitch [62, p. 56]. Zie deze referentie ook verder voor de ontwikkeling van het functiebegrip.

16. Zie [62, p. 58, Addendum] en de daar gegeven referenties.

17. Zie [62, pp. 61–62], [20, p. 17].

18. Zie [62, §9].

19. Zie [62, p. 70], [21, p. 4].

20. Zie [62, p. 77], [23, p. 500].

21. Zie [62, §8].

22. Het betreft hier vooral de theorie van analytische functies in meer complexe veranderlijken.

23. Zie [62, §12] en Monna [48].

24. Zie [62, §15].

25. Zie [33, p. 952], [12, Ch. VI, §VI].

26. Zie bijv. [33, pp. 323, 379, 429, 952, 972]. Zie Monna [49] voor diepgaande beschouwingen over de algebraïsering van de wiskunde.

27. Zie citaten van Lagrange [33, p. 615] en Laplace [33, p. 615], [39, pp. 465–466] ten gunste van de algebraïsering van de Analyse, en van Du Bois-Reymond [33, p. 973], [14, p. 11] en Poincaré [49, p. 16] voor een tegengeluid ten gunste van de meetkundige aanpak. In een recent kranteninterview [17] gaat de Engelse wiskundige Zeeman zo ver om te zeggen: "Als je geen geometrische voorstelling hebt van wat je doet, dan ben je als wiskundige alleen maar mechanisch symbolen aan het manipuleren en kun je geen inzicht hebben in wat je doet."

28. Zie [54].

29. Zie [33, pp. 43–44]

30. Hardy [25, §22] was een overtuigd "Platonist" in zijn wiskundebeoefening. Dit gold nog sterker voor Ramanujan, maar dan vanuit een Hindoeachtergrond, zie Kanigel [32, pp. 36, 65–67].

31. Casimir [8, pp. 90, 181] geeft aardige beschrijvingen van de houding t.o.v. formules van grote theoretische natuurkundigen uit de eerste decennia van deze eeuw. Bijv. voor Dirac was "the beauty of the equations" een belangrijke heuristische factor. Bij Lorentz daarentegen vindt men maar bij uitzondering gecompliceerde toepassingen van speciale functies, maar hij speelt het altijd klaar de problemen zo te formuleren dat eenvoudige differentiaal- en integraalrekening voldoende is.

32. Tilanus [57, p. 47] heeft kennelijk zo vaak onfunctioneel gebruik van formules bij presentaties gezien dat hij waarschuwt: "Vlucht niet in formules."

33. Zie Knuth [34].

34. Knuth [34, p. 182] waarschuwt echter: "Some notations will be unfortunate even when they are beautifully formatted."

35. Zie [9] en [61]

36. Zie [51].

37. Een goed voorbeeld van een inhoudrijke formule is de additieformule voor Gegenbauer-polynomen of, algemener, voor Jacobi-polynomen, zie [36].

38. Een aardige beschouwing over de rol van gelijkheid en ongelijkheid in de geschiedenis van de wiskunde wordt gegeven door Tanner [56].

39. Een grote stap vooruit was de invoering van tekens voor gelijk, kleiner dan en groter dan. Ons teken '$=$' werd ingevoerd door Recorde [53], zie [56], [6, p. 319]. Onze tekens '$<$' en '$>$' kwamen voor het eerst voor in de gedrukte posthume editie van Thomas Harriot's *Artis Analyicae Praxis* [27, p. 10], zie Tanner [56, p. 166] en Lohne [40]. De betreffende passage uit Harriot's boek is op de voorkaft gereproduceerd.

40. Zij bijv. Landau [38].

41. In de vijf delen van het z.g. Bateman-project [18], [19] vindt men veel meer gelijkheden dan ongelijkheden. Compendia van ongelijkheden zijn Hardy, Littlewood & Polya [26], Beckenbach & Bellman [4] en Mitrinović, Pěcarić & Fink [47].

42. Veel van zulke identiteiten hebben in het linker lid een oneindige som en in het rechter lid een oneindig product. Zie bijv. de sommatieformules voor hypergeometrische en q-hypergeometrische functies (cf. [24, §2.1 en Appendix II]) en de identiteiten van Rogers-Ramanujan (cf. [24, §2.7]).

43. Een eenvoudig voorbeeld is de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz:

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\,(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2),$$

waarbij $x_1, \ldots, x_n$ en $y_1, \ldots, y_n$ reële getallen zijn. Deze ongelijkheid is ook scherp. Er geldt gelijkheid dan en slechts dan als $x_1 = cy_1$, $x_2 = cy_2$, $\ldots$, $x_n = cy_n$ voor zekere constante c of als $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$.

44. Een diep voorbeeld van een scherpe ongelijkheid is het Bieberbach-vermoeden (1916) uit de functietheorie: Zij f een univalente holomorfe functie van de open eenheidsschijf in het complexe vlak naar het complexe vlak en laat f een machtreeks hebben van de vorm $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots$. Dan geldt dat $|a_n| \leq n$. Het is eenvoudig in te zien dat de ongelijkheid, zo zij geldt, scherp is (voor $f(z) := z/(1-z)^2$ krijgen we $a_n = n$). Het algemene vermoeden werd uiteindelijk in 1985 bewezen door Louis de Branges [7].

45. Soms kan een ongelijkheid $a \leq b$ worden bewezen door het bewijs van een gelijkheid, nl. door $b - a$ te schrijven als een som van kwadraten van reële getallen, dus als $b - a = \sum_i c_i^2 \geq 0$. Een elementair voorbeeld hiervan ziet men in het geval $n = 2$ van de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz uit noot 43:

$$(x_1^2 + x_2^2)\,(y_1^2 + y_2^2) - (x_1y_1 + x_2y_2)^2 = (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geq 0.$$

Een minder elementair voorbeeld van deze techniek vindt men in het bewijs van een ongelijkheid van Askey en Gasper [2, Theorem 3] voor speciale functies. Deze ongelijkheid is beroemd geworden omdat De Branges' bewijs van het Bieberbach-vermoeden (zie noot 44) er essentieel gebruik van maakte.

46. Zij f een functie die aan ieder reëel getal x een reëel getal $f(x)$ toevoegt. We zeggen dat de limiet voor x gaat naar a van $f(x)$ is gelijk aan b en we schrijven $\lim_{x \to a} f(x) = b$ als er voor ieder positief reëel getal ε een positief reëel getal δ bestaat zo dat, voor iedere x met $a - \delta < x < a$ of $a < x < a + \delta$ geldt dat $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$.

47. Vaak zijn gelijkheden verborgen ongelijkheden. Bijvoorbeeld, als een lid van een gelijkheid een oneindige som of een oneindig product of een integraal bevat, dan zou dit in volledig uitgeschreven vorm neerkomen op een serie logisch geschakelde ongelijkheden.

48. Terwijl in noot 45 ongelijkheden tot gelijkheden werden teruggebracht, komt ook het omgekeerde voor. Bijvoorbeeld kunnen we een vermoede gelijkheid $a = b$ proberen te bewijzen door de twee ongelijkheden $a \le b$ en $a \ge b$ aan te tonen. Ook zouden we $a = b$ kunnen aantonen door te laten zien dat $|a - b| < \varepsilon$ voor elke positieve ε.

49. Zie bijv. Dym & McKean [15, §2.8].

50. Zie bijv. Daubechies [11] of Meyer [45].

51. Zie [12, pp. 31–38] voor de vroege historie van enkele speciale functies.

52. Zie Miller [46] voor een systematische behandeling van separatie van variabelen vanuit een groepentheoretisch standpunt.

53. De zeta-functie van Riemann (zie bijv. [16]) is hiervan de meest beroemde. Soms bekijken getallentheoretici dezelfde speciale functies als bijv. harmonische analytici, maar dan vanuit een heel ander gezichtspunt. Als voorbeeld diene de q-exponentiële functie $z \mapsto e_q(z)$, waarbij de getallentheoretische motivatie (reeds bij Euler) ingegeven wordt door partitieproblemen, zie bijv. Andrews [1]. Daar gaat het om de q-afhankelijkheid i.p.v. de z-afhankelijkheid.

54. Laten de functies $x \mapsto \phi_n(x)$ een volledig orthogonaal stelsel in onze functieruimte vormen. We kunnen een willekeurige functie $x \mapsto f(x)$ uit die functieruimte dan ontwikkelen in termen van dit orthogonaal stelsel als $f(x) = \sum_n \widehat{f}(n)\, \phi_n(x)$. De functie $n \mapsto \widehat{f}(n)$ is dan de nieuwe beschrijving van de functie $x \mapsto f(x)$. Als het orthogonale stelsel gevormd wordt door de functies $x \mapsto \cos(nx)$ en $x \mapsto \sin(nx)$ dan spreken we van *Fourier-analyse*.

55. Zie bijv. Varadarajan [58].

56. Zie bijv. Vilenkin & Klimyk [60].

57. De analyse op Lie-groepen gaf bijvoorbeeld aanleiding tot nieuwe klassen van speciale functies, zoals de speciale functies geassocieerd met wortelsystemen. Een vroeg voorbeeld hiervan zijn de orthogonale polynomen in twee variabelen behorend bij wortelsysteem BC_2, zie Koornwinder [35]. Een voorbeeld van interactie in tegenovergestelde richting is dat met behulp van de additieformule voor Jacobi-functies kan worden nagegaan welke

irreducibele sferische representaties van half-enkelvoudige Lie-groepen van reële rang 1 unitarizeerbaar zijn, zie Flensted-Jensen & Koornwinder [22].

58. Zie Gasper & Rahman [24].

59. Zie Askey & Wilson [3].

60. Zie bijv. Drinfeld [13] en Jimbo [31].

61. Zie Koornwinder [37].

62. Bijvoorbeeld de volledige orthogonaliteit van Macdonald's q-polynomen geassocieerd met wortelsystemen kan betrekkelijk eenvoudig bewezen worden. De limiet voor $q = 1$ van dit resultaat geeft de volledige orthogonaliteit van de orthogonale polynomen geassocieerd met wortelsystemen van Heckman-Opdam. Zie Macdonald [41].

63. Er verschijnt een explosief toenemend aantal artikelen over fysische aspecten van quantumgroepen. Slechts weinige hiervan leggen ook een verband met experimentele resultaten. Zie hiertoe Bonatsos e.a. [5].

LITERATUUR

[1] G. E. Andrews, *The theory of partitions*, Addison-Wesley, 1976.

[2] R. Askey & G. Gasper, *Positive Jacobi polynomial sums, II*, Amer. J. Math. 98 (1976), 709–737.

[3] R. Askey & J. Wilson, *Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials*, Memoirs Amer. Math. Soc. (1985), no. 319.

[4] E. F. Beckenbach & R. Bellman, *Inequalities*, Springer, 1961.

[5] D. Bonatsos, E. N. Argyres, S. B. Drenska, P. P. Raychev, R. P. Roussev & Yu. F. Smirnov, *$SU_q(2)$ description of rotational spectra and its relation to the variable moment of the inertia model*, Phys. Lett. B 251 (1990), 477–482.

[6] C. B. Boyer, *A history of mathematics*, Wiley, 1968; reprinted as Princeton Paperback, Princeton University Press, 1985.

[7] L. de Branges, *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta Math. 154 (1985), 137–152.

[8] H. B. G. Casimir, *Het toeval van de werkelijkheid*, Meulenhoff, 1983.

[9] B. W. Char, K. O. Geddes, G. H. Gonnet, B. L. Leong, M. B. Monagan & S. M. Watt, *First leaves: a tutorial introduction to Maple V*, Springer, 1992.

[10] *Van Dale Groot Woordenboek der Nederlandse taal*, Van Dale Lexicografie, 12e druk, 1992.

[11] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics 61, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992.

[12] J. Dieudonné, *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700–1900, Tome I*, Hermann, 1978.

[13] V. G. Drinfel'd, *Quantum groups*, in: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, 1986*, American Mathematical Society, 1987, pp. 798–820.

[14] P. Du Bois-Reymond, *Théorie générale des fonctions*, 1887.

[15] H. Dym & H. P. McKean, *Fourier series and integrals*, Academic Press, 1972.

[16] H. M. Edwards, *Riemann's zeta function*, Academic Press, 1974.

[17] F. Eijgenraam, *Kapseizen in de wiskunde (interview met C. Zeeman)*, NRC-Handelsblad, bijvoegsel Wetenschap en Onderwijs, 11 februari 1993.

[18] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger & F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions, Vols. I, II, III*, McGraw-Hill, 1953, 1953, 1955.

[19] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger & F. G. Tricomi, *Tables of integral transforms, Vols. I, II*, McGraw-Hill, 1954.

[20] L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, in: *Opera omnia, ser. I, Vol. VIII*, ed. A. Krazer & F. Rudio, 1922.

[21] L. Euler, *Institutiones calculi differentialis*, in: *Opera omnia, ser. I, Vol. X*, ed. G. Kowaleski, 1913.

[22] M. Flensted-Jensen & T. H. Koornwinder, *Positive definite spherical functions on a non-compact rank one symmetric space*, in: *Analyse harmonique sur les groupes de Lie, II*, eds. P. Eymard, J. Faraut, G. Schiffman & R. Takahashi, Lecture Notes in Mathematics 739, Springer-Verlag, 1979, pp. 249–282.

[23] J. B. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, in: *Oeuvres, Vol. I*, ed. G. Darboux, Paris, 1888.

[24] G. Gasper & M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, Cambridge University Press, 1990.

[25] G. H. Hardy, *A mathematician's apology*, Cambridge University Press, 1940; reprinted with foreword by C. P. Snow, 1967.

[26] G. H. Hardy, J. E. Littlewood & G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, second ed., 1952.

[27] T. Harriot, *Artis analyticae praxis ad aequationes resolvendas*, ed. W. Warner, 1631.

[28] T. L. Heath, *History of Greek mathematics*, Oxford Clarendon Press, 1921, 2 vols.; Dover reprint, 1981.

[29] T. L. Heath (ed.), *The thirteen books of Euclid's Elements*, Cambridge University Press, second ed., 1925, 3 vols.; Dover reprint, 1956.

[30] F. Hultsch (ed.), *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt*, Berlin, 1877.

[31] M. Jimbo, *A q-difference analogue of $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. 10 (1985), 63–69.

[32] R. Kanigel, *The man who knew infinity. A life of the genius Ramanujan*, Charles Scribner's Sons, New York, 1991.

[33] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, 1972; paperback edition, 1980, 3 vols.

[34] D. E. Knuth, *The TeXbook*, Addison Wesley, 18th printing, 1990.

[35] T. H. Koornwinder, *Orthogonal polynomials in two variables which are eigenfunctions of two algebraically independent partial differential operators I, II*, Indag. Math. 36 (1974), 48–58, 59–66.

[36] T. H. Koornwinder, *Jacobi polynomials and their two-variable analogues*, Dissertatie, Universiteit van Amsterdam, 1975.

[37] T. H. Koornwinder, *Orthogonal polynomials in connection with quantum groups*, in: *Orthogonal polynomials: theory and practice*, ed. P. Nevai, NATO-ASI Series C, 294, Kluwer, 1990, pp. 257–292.

[38] E. Landau, *Grundlagen der Analysis*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1930.

[39] P.-S. de Laplace, *Exposition du système du monde*, in: *Oeuvres complètes, Vol. 6*, Gauthier-Villars, 1884.

[40] J. A. Lohne, *Thomas Harriot als Mathematiker*, Centaurus 11 (1965), 19–45.

[41] I. G. Macdonald, *Orthogonal polynomials associated with root systems*, preprint, 1988.

[42] M. S. Mahoney, *Another look at Greek geometrical analysis*, Arch. Hist. Exact Sci. 5 (1968), 318–348.

[43] M. S. Mahoney, *The mathematical career of Pierre de Fermat (1601–1665)*, Princeton University Press, 1973.

[44] *1991 Mathematics Subject Classification*, in: Math. Reviews, Annual Index, 1991, pp. S1–S35.

[45] Y. Meyer, *Les ondelettes: algorithmes et applications*, Armand Colin, 1992; English translation: *Wavelets: algorithms and applications*, SIAM, 1993.

[46] W. Miller, Jr., *Symmetry and separation of variables*, Addison-Wesley, 1977.

[47] D. S. Mitrinović, J. E. Pěcarić & A. M. Fink, *Classical and new inequalities in analysis*, Kluwer, 1992.

[48] A. F. Monna, *The concept of function in the 19th and 20th centuries, in particular with regard to the discussion between Baire, Borel and Lebesgue*, Arch. Hist. Exact Sci. 9 (1972), 57–84.

[49] A. F. Monna, *Methods, concepts and ideas in mathematics: aspects of an evolution*, CWI Tract 23, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1986.

[50] I. Newton, *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, in: *The mathematical papers of Isaac Newton, Vol. II, 1667–1670*, ed. D. T. Whiteside, Cambridge University Press, 1968, pp. 206–247.

[51] J. A. Paulos, *Innumeracy: Mathematical illiteracy and its consequences*, Farrar, Straus & Giroux, 1989.

[52] *Prisma van de wiskunde: 2000 wiskundige begrippen van a tot z verklaard*, Prisma Pocket 2654, Het Spectrum, 1990.

[53] R. Recorde, *The Whetstone of Witte*, 1557.

[54] S. J. van Strien, *Meetkunde in beweging*, Oratie, Universiteit van Amsterdam, 19 februari 1993.

[55] *Studiegids 1983–84, Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen, Subfaculteit der Wiskunde*, Universiteit van Amsterdam, 1983.

[56] R. C. H. Tanner, *On the role of equality and inequality in the history of mathematics*, The British Journal for the History of Science 1 (1962), 159–169.

[57] C. B. Tilanus, *Een spreekbeurt/voordracht/presentatie houden*, Aulaboeken 702, Het Spectrum, 1982.

[58] V. S. Varadarajan, *Lie groups, Lie algebras and their representations*, Prentice-Hall, 1974.

[59] F. Viète, *In artem analyticen isagoge*, ed., Leiden, 1646.

[60] N. Ja. Vilenkin & A. U. Klimyk, *Representation of Lie groups and special functions, Vols. 1, 2, 3*, Kluwer, 1992, 1993.

[61] S. Wolfram, *Mathematica: A system for doing mathematics by computer*, Addison-Wesley, second ed., 1991.

[62] A. P. Youschkevitch, *The concept of function up to the middle of the 19th century*, Arch. Hist. Exact Sci. 16 (1976), 37–85.