Aan de gang met de platonische dobbelstenen

Tom Koornwinder, KdV Instituut, FNWI, UvA

Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam, `thk@science.uva.nl`

Tijdens het evenement *Leve de Wiskunde!*, Universiteit van Amsterdam, 14 mei 2004 krijgen de deelnemers een setje platonische dobbelstenen. Hier volgen een paar suggesties voor VWO-leerlingen om wiskundig aan de gang te gaan met deze dobbelstenen of met daarmee verwante problemen.

1 Op hoeveel manieren kunnen de zijvlakken genummerd worden?

In het setje dobbelstenen zijn de zijvlakken van een regelmatig n-vlak ($n = 4$, 6, 8, 12 of 20) genummerd van 1 tot/met n. Op hoeveel manieren kan dit gedaan worden? Hierbij reken je natuurlijk twee nummeringen die door een draaiing uit elkaar verkregen kunnen worden, niet als verschillend. Op welk aantal mogelijke nummeringen kom je als je bovendien twee nummeringen die door spiegeling van het regelmatige n-vlak uit elkaar verkregen zijn, maar een keer telt?

2 Wat is de kans op een bepaald puntenaantal na een gegeven aantal worpen?

Als je een keer gooit met een van de dobbelstenen dan zijn alle mogelijke uitkomsten even waarschijnlijk. Als je twee keer achter elkaar gooit met een gewone (kubus-)dobbelsteen dan kun je alle mogelijke uitkomsten 2, 3 tot/met 12 krijgen. Bereken de kans op elke uitkomst. Welke uitkomst heeft de hoogste kans? Welke uitkomst(en) heeft (hebben) de hoogste kans als je n keer met een gewone dobbelsteen gooit?

Wat zijn de mogelijke uitkomsten als je 5 worpen doet met de 5 platonische dobbelstenen, 1 worp met elk van de dobbelstenen? Welke uitkomst heeft de hoogste kans? Wat is de kans op elke uitkomst? Je kunt formules voor deze kansen afleiden, maar je zou ook een computerprogramma kunnen schrijven dat de kansen uitrekent. In een computeralgebra-programma zoals Mathematica of Maple zou je daar bijvoorbeeld ideeën uit §3 hieronder kunnen gebruiken.

Als je toch met de computer bezig bent, dan kun je ook een programma schrijven dat het werpen van de vijf dobbelstenen simuleert. Laat dit programma een groot aantal keren draaien en registreer het puntenaantal bij elke keer. Hieruit zouden de kansen al bij benadering tevoorschijn moeten komen.

Zie ook: Eric W. Weisstein, *Dice*. From MathWorld–A Wolfram Web Resource,
`http://mathworld.wolfram.com/Dice.html`

3 Vreemde dobbelstenen

Het is niet moeilijk om na te rekenen dat

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2 = x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+x^{12}.$$

Stel je wilt de kans op totaal-uitkomst 6 weten bij twee keer werpen met een gewone dobbelsteen, dus de kans dat aantal ogen bij eerste worp plus aantal ogen bij tweede worp gelijk is aan 6. Dan kun je in het rechterlid van de vergelijking van zoëven kijken naar de coëfficiënt van x^6, deze is 5, en die dan delen door 6^2, dus je krijgt $\frac{5}{36}$. Voor de kans op een andere uitkomst kun je op een analoge manier te werk gaan. Begrijp je waarom dit goed gaat?

Nu kun je ook narekenen dat

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2 = (x + 2x^2 + 2x^3 + x^4)(x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8).$$

Hieruit kun je weer beredeneren dat als je twee kubusvormige dobbelstenen op een vreemde manier nummert, de eerste met 1,2,2,3,3,4 en de tweede met 1,3,4,5,6,8, dan het werpen van deze twee dobbelstenen na elkaar de zelfde kansen op uitkomsten geeft als het twee keer werpen van een gewone dobbelsteen.

Probeer nu een andere platonische dobbelsteen, bijv. het regelmatige 12-vlak, op twee vreemde manieren te nummeren zo dat het werpen van deze twee dobbelstenen na elkaar dezelfde kansen op uitkomsten geeft als het twee keer werpen van de gewoon genummerde platonisch dobbelsteen.

4 Eerlijke dobbelstenen

De platonische dobbelstenen zijn voorbeelden van eerlijke dobbelstenen (*fair dice*): voor ieder van de zijvlakken is er een zelfde kans dat de dobbelsteen er op landt. Er zijn echter meer types van eerlijke dobbelstenen, bijv. de *isohedrale veelvlakken*. Dit zijn *convexe* veelvlakken zo dat voor elk tweetal zijvlakken f_1 en f_2 er een draaiing of spiegeling of draaiing gevolgd door spiegeling is die het veelvlak in zichzelf overvoert zo dat veelvlak f_1 op de plaats van f_2 terecht komt. *Convex* betekent dat een lijnstuk dat twee punten van het veelvlak verbindt binnen het veelvlak ligt. De isohedrale veelvlakken zijn geclassificeerd. Zie:

- mathpuzzle.com: `http://www.mathpuzzle.com/Fairdice.htm`
- Eric W. Weisstein, *Isohedron.* From MathWorld–A Wolfram Web Resource, `http://mathworld.wolfram.com/Isohedron.html`
- Klaus Mogensen's site: `http://hjem.get2net.dk/Klaudius/Dice.htm`
- P. Diaconis and J. B. Keller, *Fair dice*, Amer. Math. Monthly 96 (1989), 337–339.

De grootste isohedron is de *hexakis icosahedron* met 120 driehoekige zijvlakken. Hij heeft 62 hoekpunten van drie verschillende types: 30 hoekpunten waar vier zijden samenkomen, 20 hoekpunten waar 6 zijden samenkomen en 12 hoekpunten waar 10 zijden samenkomen.

Er zijn ook eerlijke dobbelstenen die niet-polyhedraal zijn. Deze zijn echter alleen eerlijk bij een bepaalde manier van gooien. Bekijk bijvoorbeeld de pyramide die vier gelijkbenige driehoeken en een vierkant als zijvlakken heeft. Als de pyramide hoog en dun is dan is de kans klein dat er op het vierkant geland wordt. Als de pyramide laag en breed is dan is de kans juist groot dat er op het vierkant geland wordt. Er moet dus een tussenafmeting zijn, waarbij de kans dat er op het vierkant geland wordt precies $\frac{1}{5}$ is. Deze tussenafmeting hangt af van de manier van gooien.