

Vrst. 2.14

We hebben een Cauchyrij in de genormeerde ruimte l^1 : dat wil zeggen $\|(c_n)^j - (c_n)^i\|_1 \leq \varepsilon$ als $i, j \geq n_0$ voor zekere $n_0 \in \mathbb{N}$. We zagen al in dat voor elke n , $c_n^i \rightarrow c_n$, $i \rightarrow \infty$. Er is dus puntsgewijze convergentie. We moeten nu laten zien dat de convergentie ook geldt in de norm van l^1 en dat de limiet in l^1 ligt.

Uit bovenstaande is met de driehoeksongelijkheid te bewijzen dat

$$\|(c_n)^j\|_1 \leq \|(c_n)^{n_0}\|_1 + \varepsilon, \quad j > n_0. \quad (1)$$

Om in te zien dat de rij $(c_n)^j$ naar (c_n) convergeert, splitsen we het verschil in drie sommen:

$$\|(c_n) - (c_n)^j\|_1 \leq \sum_{k=1}^N |c_k - c_k^j| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |c_k^j| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |c_k|. \quad (2)$$

We willen nu deze drie termen afschatten. De tweede term is het lastigst. Beschouw daartoe de rij $(c_n)_{N+1}^j$ bestaande uit elementen

$$(c_{N+1}^j, c_{N+2}^j, \dots) \in l^1$$

Er geldt

$$\begin{aligned} \|(c_n)_{N+1}^j\|_1 &= \|(c_n)_{N+1}^j - (c_n)_{N+1}^{n_0} + (c_n)_{N+1}^{n_0}\|_1 \\ &\leq \|(c_n)_{N+1}^{n_0}\|_1 + \|(c_n)_{N+1}^{n_0} - (c_n)_{N+1}^j\|_1 \\ &\leq \|(c_n)_{N+1}^{n_0}\|_1 + \|(c_n)^{n_0} - (c_n)^j\|_1 \\ &\leq \|(c_n)_{N+1}^{n_0}\|_1 + \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{als } n_0 \text{ groot genoeg, voor } j > n_0, \text{ wegens (1)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{als } N \text{ groot genoeg} \end{aligned}$$

Dus voor n_0 en N groot en $j > n_0$ geldt met (2):

$$\|(c_n) - (c_n)^j\|_1 \leq \sum_{k=1}^N |c_k - c_k^j| + \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=N+1}^{\infty} |c_k|$$

Door nu N opnieuw voldoende groot te kiezen verkrijgen we

$$\|(c_n) - (c_n)^j\|_1 \leq \sum_{k=1}^N |c_k - c_k^j| + \frac{3}{4}\varepsilon$$

Voor deze n_0 en N kiezen we nu een $\tilde{j} > n_0$ waarvoor geldt dat

$$\sum_{k=1}^N |c_k - c_k^{\tilde{j}}| \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

zodat

$$\|(c_n) - (c_n)^{\tilde{j}}\|_1 \leq \varepsilon.$$

We moeten nog bewijzen dat $(c_n) \in l^1$. Uit (1) volgt dat er een $M \in \mathbb{R}$ bestaat zodat voor alle $j \in \mathbb{N}$ geldt $\|(c_n)^j\|_1 \leq M$. Met wederom de driehoeksongelijkheid is voor de limiet (c_n) in te zien dat $\|(c_n)\|_1 \leq M + \varepsilon$, zodat $(c_n) \in l^1$.