

De Wachttijd-paradox

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
Mastercourse 15 november 2005

Peter Spreij
spreij@science.uva.nl

1 Het probleem

In deze mastercourse behandelen we het volgende probleem. Iemand komt op een willekeurig moment aan bij een bushalte. Hoe lang moet hij/zij gemiddeld wachten totdat de bus arriveert? Met behulp van enige intuïtieve argumenten stellen we een eerste oplossing voor. Voor een wiskundig verantwoorde behandeling zullen we gebruik maken van een *stochastisch model*. Immers, het aankomen op een *willekeurig* moment, alsmede het vragen naar een *gemiddelde* wachtduur (denk aan een *verwachting*), suggereert dat we met behulp van Kansrekening tot een oplossing moeten komen. We zullen echter ook zien dat op het oog verstandige argumenten tot tegenstrijdige antwoorden leiden. De hierbij ontstane *paradox* laat zich gelukkig echter verklaren.

2 Een eerste aanpak

Om enig gevoel te ontwikkelen zullen we eerst een eenvoudige probleemstelling ontwikkelen. We veronderstellen dat de bussen volgens een dienstregeling rijden (en zich daar ook stipt aan houden). De dienstregeling zit zo in elkaar dat er per uur 3 bussen de halte aandoen. Dit patroon herhaalt zich elk uur. Gemiddeld zit er dus 20 minuten tussen twee bussen. Iemand die op een volstrekt willekeurig moment bij de halte aan komt, zal dus ergens in een interval terecht komen dat gemiddeld lengte 20 (minuten heeft). Het ligt voor de hand dat de verwachte wachtduur 10 minuten is.

We bekijken deze redenering nader en daartoe geven we een preciezere invulling van de dienstregeling in een aantal situaties. Eerst bekijken we het *homogene* geval. De bussen rijden precies om de 20 minuten. Vanwege een overdaad aan symmetrie is het antwoord van gemiddeld 10 minuten te moeten wachten alleszins redelijk.

In de volgende situatie bekijken we een ander extreem geval: (ongeveer) maximaal inhomogeen. De bussen komen alle drie op vrijwel hetzelfde moment aan. Idealiter veronderstellen we dat ze op precies hetzelfde moment aankomen, en dit komt dus (vrijwel) overeen met 1 bus per uur. Duidelijk is dat er nu gemiddeld 30 minuten op de bushalte doorgebracht moet worden, veel meer dus dan de 10 minuten van het vorige geval.

In het derde voorbeeld veronderstellen we dat er een bus aankomt op precies het hele uur, de volgende 10 minuten later, dan een 20 minuten daarna, en daarna komt er weer een op het volgende hele uur. Gevoelsmatig ‘zit’ deze situatie ergens tussen de vorige twee in, en de gemiddelde wachtduur

zou dan ook tussen de 10 en 30 minuten moeten liggen. We zullen, zonder al te precies te worden, rechtvaardigen dat het antwoord nu 11 minuten en 40 seconden is.

Stel dat je zou weten dat de persoon in kwestie ergens willekeurig in het eerste interval van 10 minuten zou arriveren. Een gemiddelde wachttijd van 5 minuten ligt dan voor de hand. Bij het weten van arriveren in elk van de overige intervallen zijn de antwoorden respectievelijk 10 en 15 minuten. Het eindantwoord zou dus een gemiddelde van deze drie moeten zijn. Hoe te middelen? We kunnen er redelijkerwijze vanuit gaan dat een willekeurig gekozen moment met kans $1/6$ in het interval ligt van 10 minuten, met kans $2/6$ in het interval van 20 minuten en met kans $3/6$ in het interval van 30 minuten. Middelen we dan de drie antwoorden met deze kansen als gewichten, dan volgt het aangekondigde eindantwoord. Met dezelfde methodiek kunnen we overigens ook de antwoorden van de vorige twee situaties uitrekenen.

Een iets andere aanpak is door eerst te kijken naar de gemiddelde lengte van het interval waarin de persoon arriveert. We hebben hierboven de kansen uitgerekend dat zo'n interval lengte 10, 20 of 30 minuten heeft. De elementaire verwachtingsformule levert dan voor de verwachte lengte

$$\frac{1}{6} \cdot 10 + \frac{2}{6} \cdot 20 + \frac{3}{6} \cdot 30 = \frac{70}{3}.$$

De gemiddelde wachttijd moet dan de helft hiervan bedragen, $\frac{35}{3}$ minuten, oftewel 11 minuten en 40 seconden.

We concluderen dat de gemiddelde wachttijd dus afhangt van de configuratie van de aankomsttijdstippen. Vanzelfsprekend heeft ook de frequentie (neem bijvoorbeeld eens vier aankomsten per uur i.p.v. drie) van aankomsten invloed.

In de hierboven genoemde voorbeelden waren de aankomsttijden van de bus steeds vast; en er werd volgens een vaste dienstregeling gereden. In de volgende paragrafen veronderstellen we dat de aankomsttijden stochastisch zijn, hetgeen bij velen als een meer realistische benadering zal overkomen. Dit brengt met zich mee de onderlinge tijdsduren tussen aankomsten variabel gaat worden, evenals de frequentie (voor zover het nog zin heeft hierover te spreken).

3 Poisson proces

Het *Poisson* proces dat we in deze paragraaf behandelen, is een van de meest bestudeerde stochastische processen. Vrijwel alle modellen die nu gebruikt

worden voor telecommunicatie zijn hierop gebaseerd, met dien verstande dat er vaak veel complexere varianten gebruikt worden.

Het introduceren van het Poisson proces geschiedt aan de hand van een rij stochastische variabelen S_1, S_2, \dots die onderling *stochastisch onafhankelijk* zijn en bovendien alle exponentieel verdeeld met een parameter λ . Dit laatste betekent dat de S_k alle een dichtheid f hebben, die gegeven wordt door

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

voor $x > 0$ (en door 0 als $x \leq 0$). De verdelingsfunctie F van deze stochasten is dan gegeven door

$$F(x) = \mathbb{P}(S_k \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

De verwachtingen $\mathbb{E}S_k$ van de tijdsduren S_k zijn alle gelijk aan $\frac{1}{\lambda}$. Exponentiële verdelingen worden van oudsher veel gebruikt bij eenvoudige modellen voor levensduren van apparaten. Een interessante eigenschap, zelfs een *karacterisering*, van de exponentiële verdeling is de zogenaamde ‘*geheugenloosheid*’:

$$\mathbb{P}(S_k > t + s | S_k > s) = \mathbb{P}(S_k > t).$$

In woorden betekent dit dat, gegeven een levensduur van tenminste s , de (voorwaardelijke) kans dat de levensduur nog tenminste t groter is, gelijk is aan de (onvoorwaardelijke) kans op een levensduur van tenminste t . In zekere zin ‘*begint de levensduur opnieuw*’ op tijdstip s .

We introduceren nu de stochasten

$$T_k = S_1 + \dots + S_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

en definiëren voorts $T_0 = 0$. De interpretatie van deze stochasten is dat de T_k aankomsttijden (van een bus) vormen, gerekend vanaf een zeker begintijdstip en dat de S_k de tijdsduren tussen twee opeenvolgende aankomsten voorstellen. Anders dan in de vorige paragraaf zijn de tijdsduren en tijdstippen nu dus stochastisch.

Naast de hierboven geïntroduceerde stochastische variabelen, gaan we nu een stochastisch proces definiëren, het Poisson proces. Dit is een collectie stochastische variabelen $N = \{N_t, t \geq 0\}$, gegeven door

$$N_t = \max\{k : T_k \leq t\}.$$

We zien onmiddellijk dat N_t niet-dalend van t afhangt, en een grafiek van (een realisatie) van N ziet er uit als een trap, waarbij op de tijdstippen T_k een sprongetje ter grootte 1 omhoog gemaakt wordt. De naam Poisson proces wordt verklaard in de volgende propositie.

Propositie 3.1 Voor elke $t \geq 0$ is de stochastisch variabele N_t Poisson verdeeld met parameter λt . Dus

$$\mathbb{P}(N_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Bewijs De fundamentele gelijkheid die we gebruiken, is dat de twee gebeurtenissen $\{N_t = k\}$ en $\{T_k \leq t < T_{k+1}\}$ identiek zijn. Een ander in dit verband belangrijk feit is dat de stochastische variabelen T_k en S_{k+1} onafhankelijk zijn. Verder hebben we nodig dat elke T_k dichtheid f_k heeft, die gegeven wordt door

$$f_k(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1}}{k!} e^{-\lambda x},$$

voor $x > 0$ (zie opgave 7.1). Ook zegt men wel dat T_k gamma verdeeld is. We gaan nu aan de slag. Veronderstel $k \geq 1$. Dan

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_t = k) &= \mathbb{P}(T_k \leq t < T_{k+1}) \\ &= \mathbb{P}(T_k \leq t, T_k + S_{k+1} > t) \end{aligned}$$

Nu herinneren we ons dat kansen op gebeurtenissen met twee stochasten berekend worden via gebiedsintegralen van de simultane dichtheid. Wegens onafhankelijkheid is de simultane dichtheid van (T_k, S_{k+1}) het product van de dichtheden f_k en f . We krijgen dan

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_k \leq t, T_k + S_{k+1} > t) &= \int_0^t \left(\int_{t-x}^{\infty} f(y) dy \right) f_k(x) dx \\ &= \int_0^t e^{-\lambda(t-x)} f_k(x) dx \\ &= e^{-\lambda t} \int_0^t \lambda^k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} dx \\ &= e^{-\lambda t} \lambda^k \frac{t^k}{k!}. \end{aligned}$$

Dit bewijst het gestelde voor $k \geq 1$. Voor $k = 0$ hebben we

$$\mathbb{P}(N_t = 0) = \mathbb{P}(S_1 > t) = e^{-\lambda t}.$$

Het bewijs is geleverd. □

Het Poisson process heeft een groot aantal andere belangrijke eigenschappen, waarvan we overigens geen gebruik zullen maken. Vermeldenswaard is echter wel dat het Poisson proces *onafhankelijke aangroeiingen* heeft. Als $0 = t_0 <$

$t_1 < t_2 < \dots$ oplopende tijdstippen zijn, dan vormen de stochasten $N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$ voor $k \in \mathbb{N}$ een onafhankelijke rij. Bovendien geldt dat $N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$ een Poisson verdeling heeft met parameter $\lambda(t_k - t_{k-1})$.

De parameter λ kunnen we nu interpreteren als een frequentie. Immers voor $t = 1$ geldt $\mathbb{E}N_1 = \lambda$, en dus is λ gelijk aan het aantal verwachte aankomsten per tijdseenheid.

4 Een tweede aanpak en een paradox

Terugkerend tot de vraagstelling "hoe lang moet iemand gemiddels wachten op een bus als hij/zij op een willekeurig tijdstip t aankomt?", beschouwen we de volgende twee redeneringen om onze standaardvraag te beantwoorden.

1. De geheugenloosheid van de exponentiële verdeling suggereert dat het specifieke aankomsttijdstip t niet van invloed is op de wachttijd tot de volgende bus, het wachten begint vanaf tijdstip t 'opnieuw'. En dus is de gemiddelde wachttijd gelijk aan de verwachting $\frac{1}{\lambda}$ van de exponentiële verdeling.
2. Anderzijds kunnen we de redering uit paragraaf 2 volgen. De gemiddelde wachttijd bedraagt steeds de helft van de verwachte lengte van het interval waarin t ligt. En dus is de gemiddelde wachttijd de helft van $\frac{1}{\lambda}$.

Beide redeneringen zien er plausibel uit, maar leiden tot verschillende antwoorden en dus zijn we geconfronteerd met een paradox. We zullen verderop laten zien dat beide argumentaties correct zijn, en dat ze bovendien tot dezelfde antwoorden leiden, *mits juist toegepast*.

5 Een stelling

Op een willekeurig tijdstip t zijn er N_t sprongtijdstippen aan vooraf gegaan. De laatste sprong voor of op tijdstip t is dan T_{N_t} en het eerstvolgende sprongtijdstip strikt na t is dus T_{N_t+1} . Hieruit volgt dat de stochastische variabelen $V_t := t - T_{N_t}$ en $R_t = T_{N_t+1} - t$ beide niet-negatief zijn. De interpretatie van deze twee is duidelijk. V_t is de tijd die verstreken is sinds de laatste bus voor t langs kwam, en R_t is de tijd die nog moet worden gewacht op de eerstvolgende bus. De stochastische variabele $W_t := V_t + R_t$ is dan de wachttijd tussen de twee opeenvolgende bussen voor en na t . Om voor de hand liggende redenen heten V_t en R_t respectievelijk de verstreken en resterende wachttijd (voor en na t). Let op een belangrijk verschil tussen de stochasten T_{N_t} en T_k . In het eerste geval is de index ook een stochastische

variabele. Iets dergelijks geldt ook voor $W_t = T_{N_t+1} - T_{N_t}$. Voor een vaste index k zouden we S_k als verschil krijgen. We bepalen nu de kansverdelingen van V_t en R_t . We zullen zien dat R_t dezelfde verdeling heeft als de S_k , en dat W_t dus een heel andere verdeling heeft. In ‘zekere zin’ (in termen van verdeling) geldt zelfs dat W_t altijd ‘groter’ is dan een S_k . Dit heeft te maken met wat we hebben gezien in paragraaf 2: een lang interval bevat met grotere kans het tijdstip t .

Stelling 5.1 *Zij V_t de verstreken wachttijd op tijdstip t en R_t de resterende wachttijd. Dan zijn V_t en R_t onafhankelijk. Bovendien geldt dat R_t een exponentiële verdeling met parameter λ heeft en V_t een afgeknotte exponentiële verdeling met verdelingsfunctie gegeven door*

$$\mathbb{P}(V_t \leq v) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda v}, & \text{als } v < t \\ 1, & \text{als } v \geq t \end{cases}$$

Bewijs De onafhankelijkheid van V_t en R_t laten we als een opgave rusten (opgave 7.2) en we beperken ons hier tot het bepalen van de verdelingsfuncties. Een aardige eigenschap van de dichtheden f_k is dat voor alle $x > 0$ geldt

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \lambda.$$

Van deze eigenschap gaan we hieronder gebruik maken. We bepalen nu de verdelingsfunctie van V_t , dus kansen van het type $\mathbb{P}(V_t \leq v)$, oftewel $\mathbb{P}(T_{N_t} \geq t - v)$. Duidelijk is dat kans gelijk is aan 1, als $v \geq t$. We veronderstellen daarom verder dat $v < t$. Rekenen aan $\mathbb{P}(T_{N_t} < t - v) = 1 - \mathbb{P}(T_{N_t} \geq t - v)$ is handiger. Uitsplitsen naar de gebeurtenissen $\{N_t = k\}$ geeft dan

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{N_t} < t - v) &= \mathbb{P}(T_0 < t - v, N_t = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_k < t - v, N_t = k) \\ &= \mathbb{P}(N_t = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_k < t - v, T_k \leq t < T_{k+1}) \\ &= \mathbb{P}(N_t = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_k < t - v, T_{k+1} > t) \\ &= \mathbb{P}(N_t = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_k < t - v, T_k + S_{k+1} > t). \end{aligned}$$

Nu herinneren we ons opnieuw dat kansen op gebeurtenissen met twee stochasten berekend worden via gebiedsintegralen. We krijgen dan voor de laatste oneindige som

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_k < t - v, T_k + S_{k+1} > t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{t-v} \left(\int_{t-x}^{\infty} f(y) dy \right) f_k(x) dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{t-v} \left(\int_{t-x}^{\infty} f(y) dy \right) f_k(x) dx \\
&= \int_0^{t-v} \left(\int_{t-x}^{\infty} f(y) dy \right) \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx \\
&= \int_0^{t-v} \left(\int_{t-x}^{\infty} f(y) dy \right) \lambda dx \\
&= \int_0^{t-v} \left(\int_{t-x}^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy \right) \lambda dx \\
&= \int_0^{t-v} e^{-\lambda(t-x)} \lambda dx \\
&= e^{-\lambda v} - e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

Samen met $\mathbb{P}(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$ geeft dit $\mathbb{P}(T_{N_t} < t - v) = e^{-\lambda v}$, equivalent aan wat we moesten bewijzen. Het bewijs dat R_t exponentieel verdeeld is, verloopt net zo. \square

Opmerkelijk is dat de verdeling van R_t niet van t afhangt, maar die van V_t wel. Echter, als t ‘groot’ is, dan is de verdeling van V_t ook (vrijwel) onafhankelijk van t . Voor de aardigheid bepalen we ook nog even de verwachtingen $\mathbb{E}R_t$ en $\mathbb{E}V_t$. Natuurlijk geldt $\mathbb{E}R_t = \frac{1}{\lambda}$. We hebben verder

$$\mathbb{E}V_t = \int_0^t u \lambda e^{-\lambda u} du = \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}).$$

Voor grote t is dit ongeveer $\frac{1}{\lambda}$. Verder geldt voor grote t dat $\mathbb{E}W_t = \mathbb{E}V_t + \mathbb{E}R_t \approx \frac{2}{\lambda}$.

Grote waarden van t betekent dat we ver vanaf tijdstip nul verwijderd zijn. Echter kunnen we ook een andere interpretatie hieraan geven. We kunnen ook zeggen dat we een vast tijdstip t gekozen hebben, maar dat de oorsprong van de tijd verschuift naar het oneindige verleden. Bij een oorsprong die oneindig ver weg gedacht wordt, zeggen we ook wel dat het Poisson proces in een stationaire toestand is. En in die situatie geldt exact dat $\mathbb{E}V_t$ ook gelijk is aan $\frac{1}{\lambda}$, en dan $\mathbb{E}W_t = \frac{2}{\lambda}$.

6 Paradox en verzoening

We gaan nu nader op de redeneringen uit paragraaf 4 in.

De eerste redenering zien we terug bij het bepalen van de verdeling van R_t . We hebben gezien in stelling 5.1 dat ook R_t exponentieel verdeeld is, en dat daarom het antwoord op de vraag gegeven wordt door $\mathbb{E}R_t = \frac{1}{\lambda}$. Het aardige is nu dat dit gelijk is aan de verwachting van elke S_k , de tijdsduur die verstrijkt tussen twee opeenvolgende aankomsten bij de bushalte, en niet aan de helft hiervan!

De essentie van de tweede redenering is dat de gemiddelde wachttijd de helft is van de lengte van het tijdsinterval waarin t zich bevindt. En die laatste verwachting hebben we voor het stationnaire geval hierboven bepaald op $\frac{2}{\lambda}$, waarvan de helft precies $\frac{1}{\lambda}$ is. Derhalve leiden beide redeneringen tot hetzelfde antwoord.

Tot slot: We zouden nog kunnen kijken naar de situatie waarin ook het tijdstip t stochastisch verondersteld wordt. Als we deze daarom aangeven met T en we veronderstellen dat T stochastisch onafhankelijk is van de S_k , verandert er behalve wat notatie in wezen niets. De gemiddelde wachttijd op de eerstvolgende bus na T blijft $\frac{1}{\lambda}$.

7 Opgaven

1. Laat zien (m.b.v. volledige inductie) dat de stochastische variabele T_k dichtheid f_k heeft, zoals gegeven in het bewijs van propositie 3.1.
2. Laat zien dat de stochasten V_t en R_t uit stelling 5.1 stochastisch onafhankelijk zijn. Bepaal daartoe de kansen $\mathbb{P}(V_t > v, R_t > r)$ (maak onderscheid tussen $v < t$ en $v \geq t$ op een wijze analoog aan het bewijs van stelling 5.1, en concludeer dat de ‘productregel’ geldt.
3. Laat zien dat de stochastische variabele W_t een dichtheid f_t heeft die voor $w > 0$ gegeven wordt door

$$f_t(w) = \begin{cases} \lambda^2 w e^{-\lambda w}, & w \leq t \\ \lambda(1 + \lambda t) e^{-\lambda w}, & w > t. \end{cases}$$

Zij F_t de bijbehorende verdelingsfunctie. Laat zien dat uit bovenstaande volgt dat

$$F_t(w) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda w} - \lambda w e^{-\lambda w}, & w \leq t \\ 1 - e^{-\lambda t} - \lambda w e^{-\lambda w}, & w > t. \end{cases}$$

Bovendien geldt $\lim_{t \rightarrow \infty} F_t(w) = \int_{-\infty}^w \lim_{t \rightarrow \infty} f_t(u) du$.