Van Cox-Ross-Rubinstein tot Black-Scholes

Peter Spreij
Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

`spreij@science.uva.nl`
`www.science.uva.nl/~spreij`

versie: 18 november 2004

1 Basisbegrippen

In deze paragraaf behandelen we een aantal begrippen uit de theorie van het waarderen van derivaten voor modellen in discrete tijd. Deze begrippen passen we vervolgens toe op het Cox-Ross-Rubinstein model, dat gebaseerd is op het gebruik van de binomiale verdeling.

We beschouwen een markt waarin gehandeld wordt op de tijdstippen $t \in \{0, \dots, N\}$. Verhandeld worden een obligatie met prijs op tijdstip t gelijk aan B_t en een aandeel met prijs op tijdstip t gelijk aan S_t. We normalizeren de obligatieprijs door af te spreken dat $B_0 = 1$. Verder nemen we aan dat de waarde van de obligatie groeit met een rentevoet r, zodat $B_t = (1 + r)^t$.

De prijs van het aandeel is verondersteld stochastisch te bewegen, in de zin dat we op elk tijdstip t, geen enkele waarde van de prijs op $t + 1$ (of verder in de toekomst) met zekerheid kennen. Op tijdstip $t + 1$ zijn er verschillende mogelijkheden, en welke zich zal voordoen, weten we op tijdstip t niet. We zullen resultaten vaak formuleren in termen van *verdisconteerde* prijzen en waarden. Deze geven we aan met een streep op de onderhavige variabele. Dus, als Y_t de waarde van een of ander financieel product op een tijdstip t voorstelt, dan geven we met $\bar{Y}_t$ de verdisconteerde waarde aan, die gedefinieerd is door

$$\bar{Y}_t = \frac{Y_t}{B_t}.$$

Merk dus op dat we Y_t delen door de obligatieprijs op hetzelfde tijdstip t. Binnen de financiële wiskunde wordt ook wel gezegd dat de obligatieprijs als een *numéraire* gebruikt wordt. De interpretatie van het verdisconteren (met de geldende waarde van de obligatie op het onderhavige tijdstip) is dat we alle prijzen en waarden normaliseren in termen van de obligatieprijs. Belangrijk is natuurljk de verdisconteerde aandeelprijs $\bar{S}$ ($\bar{S}_t = S_t/B_t$), en ook hebben we de triviale identiteiten $\bar{B}_t = 1$ for all t.

We zullen ons gaan bezighouden met *portefeuilles*. Een portefeuille is niets anders dan een rijtje paren (x_t, y_t) dat we als volgt interpreteren. De grootheid x_t is het aantal aandelen dat de portefeuillehouder op tijdstip t bezit en y_t het aantal obligaties. De *waarde* op tijdstip t van de portefeuille geven we aan met V_t en er geldt (per definitie)

$$V_t = x_t S_t + y_t B_t.$$

Evenzo hebben we een uitdrukking voor de verdisconteerde waarde van de protefeuille: $\bar{V}_t = x_t \bar{S}_t + y_t$.
We maken de volgende belangrijke afspraak voor het ontwikkelen van de theorie: x_t and y_t kunnen willekeurige reële getallen zijn (dus ook breuken en negatieve getallen, het laatste correspondeert met short gaan). Verder kan een belegger niet in de toekomst kijken, maar mag natuurlijk alle informatie over de markt in het verleden gebruiken. Daarom zullen x_t en y_t in het algemeen afhangen van S_0 tot en met S_{t-1}. Merk nog even op dat in een stochastisch model voor de aandeelprijzen, nu ook de portefeuillesamenstellingen stochastisch worden.

We maken de veronderstelling dat de markt *arbitragevrij* is, hetgeen we hieronder in een wiskundig precieze manier gaan formuleren. Eerst nog iets over de interpretatie. Een portefeuille noemen we een *mogelijkheid tot arbitrage* (over de periode $\{0, \ldots, N\}$) als de waarde op tijdstip 0 gelijk is aan 0 en de waarde op tijdstip N nooit negatief is, terwijl een positieve waarde gerealiseerd kan worden. Met andere woorden: de bezitter van zo'n portefeuile kan nooit armer worden, wel rijker. Als we kansen toekennen aan de bewegingen van op de aandeelmarkt en de corresponderende kansmaat aangeven met $\mathbb{P}$, dan kunnen we een arbitrage-mogelijkheid weergeven met de formules $\mathbb{P}(V_0 = 0) = 1$, $\mathbb{P}(V_N \geq 0) = 1$ en $\mathbb{P}(V_N > 0) > 0$. We hebben aldus een probabilistische formulering van het begrip arbitrage. Een markt heet *arbitragevrij* als er geen arbitragemogelijkheden zijn.

Belangrijk is voorts het begrip *zelffinancierende* portefeuilles. In woorden is dat een portefeuille die louter een initiële investering vereist, zodat alle waardeveranderingen in het vervolg alleen het gevolg zijn van de verandering van de prijs van het aandeel en/of die van de obligatie, maar niet van kapitaalinjecties of -onttrekkingen (zie ook vergelijking (1.2)). Wat formeler, een portfeuille heet zelffinancierend als voor alle $t \geq 0$ geldt dat

$$x_t S_t + y_t B_t = x_{t+1} S_t + y_{t+1} B_t. \tag{1.1}$$

Deze uitdrukking heeft onmiskenbaar de interpretatie van een *budgetvergelijking*. Links staat de hoeveelheid beschikbaar geld (de waarde op tijdstip t), aan de rechterkant de nieuw gekozen hoeveelheden in de portefeuille (x_{t+1} en y_{t+1}) die zo gekozen worden dat de nieuwe portefeuille precies dezelfde waarde heeft als de oude.

Een alternatieve en equivalente manier om (1.1) uit te drukken maakt gebruik van de Δ operator. Voor een willekeurig proces Y wordt het proces ΔY gedefinieerd door $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ (met $t \geq 1$ en $\Delta Y_0 = Y_0$).
Er valt dan af te leiden dat geldt dat een portefeuille zelffinancierend is als en alleen als

$$\Delta V_t = x_t \Delta S_t + y_t \Delta B_t \text{ for all } t \geq 0. \tag{1.2}$$

Deze vergelijking reflecteert de intuïtieve betekenis van het begrip zellfinancierend: waardeveranderingen van de portfeuille zijn alleen het gevolg van koersbewegingen. Stappen we over op verdisconteerde waarden, dan krijgt vergelijking (1.2) de volgende eenvoudigere vorm.

$$\Delta \bar{V}_t = x_t \Delta \bar{S}_t \text{ for all } t \geq 0. \tag{1.3}$$

Alles in dit deel van de cursus is gericht op het waarderen van financiële derivaten (oftewel *contingent claims*) met behulp van eenvoudige modellen voor een financiële markt. Zoals de naam al aangeeft zijn deze gedefinieerd in termen van onderliggende producten, in het geval van deze cursus is dat het aandeel. Het ligt dus voor de hand dat er een relatie bestaat tussen de prijs van het aandeel en het daarop gebaseerde derivaat. Tenminste, als de markt vrij van arbitrage is. We gaan verderop onderzoeken hoe deze relatie er precies uitziet.

2 Het Cox-Ross-Rubinstein model

Na de inleidende opmerkingen beschouwen we nu een markt die beschreven wordt met het Cox-Ross-Rubinstein (CRR) model. We maken gebruik van een proces Z dat voor elke $t \geq 1$ gedefinieerd is door

$$Z_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}. \tag{2.1}$$

In het CRR model wordt verondersteld dat voor alle t de breuk Z_t slechts de twee waarden u en d kan aannemen. De beginwaarde S_0 zetten we vast op s_0. Omdat we kunnen schrijven dat $S_t = S_0 \prod_{k=1}^{t} Z_k$, zien we dat S_t zijn waarden aanneemt in de verzameling $\{s_0 d^t, s_0 u d^{t-1}, \ldots, s_0 u^t\}$. Naast het proces Z introduceren we het *(cumulatieve) rendements proces* $R = (R_1, \ldots, R_N)$. Het is gedefinieerd door

$$\Delta R_t = \frac{\Delta S_t}{S_{t-1}}, \text{ for } t \in \{1, \ldots, N\}. \tag{2.2}$$

Voor een rudimentair begrip van de CRR markt beperken we ons eerst tot een *één-periode* situatie, d.w.z. dat we het geval $N = 1$ onder de loep nemen. Er geldt het volgende (dit is opgave 5.1, hoewel het resultaat intuïtief duidelijk is).

Propositie 2.1 *De CRR markt met $N = 1$ is arbitragevrij als en alleen als $d < 1 + r < u$.*

In het vervolg zullen we *altijd* werken onder de veronderstelling dat er geen arbitrage mogelijk is. We bekijken nu hoe we een derivaat X moeten waarderen in een één-periode CRR markt. Zo'n derivaat is per definitie te schrijven als $X = f(S_1)$, voor een of andere functie f. Een zeer aansprekend voorbeeld van zo'n derivaat is de *Europese call-optie* met uitoefenprijs K die we wiskundig kunnen weergeven met behulp van $f(x) = (x - K)^+$, zodat $X = (S_1 - K)^+$. De centrale vraag is of hiervoor een objectieve prijs op $t = 0$ bestaat en hoe groot die dan is. Houd hierbij in de gaten dat de toekomstige waarde (op $t = 1$) onzeker is, als gevolg van de twee mogelijkheden ($s_0 u$ en $s_0 d$) die er zijn voor de waarde van S_1.

Het antwoord op deze vraag wordt verkregen door het derivaat te vergelijken met *een portefeuille die zo gekozen is dat de waarde ervan op $t = 1$ precies gelijk is aan de waarde van het derivaat, hoe de prijsontwikkeling van het aandeel ook zal zijn.* Op die manier hebben we twee financiële producten met identieke waarden op $t = 1$, zodat hun waarden op $t = 0$ (arbitrage uitsluitend) dezelfde dienen te zijn. Zo'n portefeuille (als we die kunnen vinden) dekt het derivaat dus af, en heet ook wel *hedge* portefeuille.

Het vinden van deze portefeuille komt neer op het vinden van de getallen x en y zodat geldt

$$xS_1 + yB_1 = f(S_1),$$

wat de waarde van S_1 ook is. Omdat we hiervoor de twee mogelijkheden s_0u en s_0d hebben, kunnen we bovenstaande relatie dus splitsen in het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} xs_0u + y(1+r) &= f(s_0u) \\ xs_0d + y(1+r) &= f(s_0d), \end{aligned}$$

dat de oplossing

$$\begin{aligned} x &= \frac{f(s_0u) - f(s_0d)}{s_0(u-d)} \\ y &= \frac{uf(s_0d) - df(s_0u)}{(1+r)(u-d)} \end{aligned}$$

heeft. Hiermee berekenen we de waarde van de portefeuille op $t = 0$ en we vinden

$$\bar{V}_0 = V_0 = \frac{1}{1+r}\left(\frac{1+r-d}{u-d}f(s_0u) + \frac{u-(1+r)}{u-d}f(s_0d)\right).$$

Omdat we hebben verondersteld dat er geen arbitrage mogelijk is, liggen de getallen

$$q_u := \frac{1+r-d}{u-d} \quad \text{and} \quad q_d := \tfrac{u-(1+r)}{u-d} \tag{2.3}$$

wegens propositie 2.1 in $(0,1)$ en hebben som 1. M.a.w. we kunnen deze getallen interpreteren als *kansen*, en dat gaan we dan ook doen. We leggen een *kansmaat* $\mathbb{Q}$ op de verzameling uitkomsten van Z_1 vast door af te spreken dat $\mathbb{Q}(Z_1 = u) = q_u$ en $\mathbb{Q}(Z_1 = d) = q_d$. Met deze afspraak kunnen we schrijven met behulp van de notatie $\mathbb{E}_\mathbb{Q}$ voor verwachting onder $\mathbb{Q}$

$$V_0 = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\,\frac{1}{1+r}f(s_0Z_1) = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\,\frac{1}{1+r}f(S_1),$$

en, in verdisconteerde termen, $V_0 = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\,\bar{f}(S_1)$. De conclusie die we uit dit voorbeeld kunnen trekken is dat de eerlijke, objectieve, prijs op tijdstip $t = 0$ van het derivaat de gedaante heeft van een verwachting van de verdisconteerde waarde van het derivaat op tijdstip $t = 1$, en wel onder een geschikt gekozen kansmaat. Deze kansmaat, $\mathbb{Q}$, heet wel de *risico neutrale kansmaat*. De kansmaat $\mathbb{Q}$ heeft de volgende interessante eigenschap

$$\mathbb{E}_\mathbb{Q}\,S_1 = q_us_0u + q_ds_0d = s_0(1+r),$$

oftewel, in verdisconteerde termen, $\mathbb{E}_\mathbb{Q}\,\bar{S}_1 = s_0 = \bar{s}_0$. We zien hier dat de verwachting (genomen onder $\mathbb{Q}$) van de verdisconteerde aandeelprijs (op $t = 1$) precies gelijk is aan de oorspronkelijke prijs. Dit is het simpelste voorbeeld van wat in de kansrekening bekend staat als een *martingaal onder* $\mathbb{Q}$. De kansmaat $\mathbb{Q}$ is in zekere zin kunstmatig. Hij fungeert als een middel om allerlei uitdrukkingen een eenvoudigere gedaante te geven.

Natuurlijk is het mogelijk aan de waarden van S (met $t = 0, 1$) andere kansen toe te kennen, samengevat in een kansmaat $\mathbb{P}$, bijvoorbeeld degene die het 'echte' marktgedrag beschrijft (we geloven nu even dat dit werkelijk zo kan). Het feit dat we voor S_1 twee mogelijke uitkomsten hebben, wordt dan vertaald in de eisen $\mathbb{P}(S_1 = s_0 u) > 0$ en $\mathbb{P}(S_1 = s_0 d) > 0$. Omdat de corresponderende kansen onder $\mathbb{Q}$ ook allebei positief zijn, betekent dit dat de kansmaten $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{P}$ equivalent zijn in maattheoretische zin: gebeurtenissen zijn mogelijk onder de ene kansmaat (hebben positieve kans) als en alleen als ze ook mogelijk zijn onder de andere kansmaat. Hierom wordt $\mathbb{Q}$ ook wel de *equivalente martingaalmaat* genoemd. Impliciet hebben we hierboven laten zien dat $\mathbb{Q}$ de enige kansmaat is met de eigenschap dat $\bar{S}$ een martingaal is.

Nu we door hebben hoe we dervaten in een één-periode model van een prijs voorzien, gaan we de stap naar een multi-periode CRR markt maken, een markt met een tijdshorizon $N > 1$.

Bekijk in eerste instantie het geval $N = 2$ en een *enkelvoudige* claim X, d.w.z. we hebben $X = f(S_2)$, voor een of andere reëelwaardige functie f, gedefinieerd op de verzameling $\mathcal{S}_2 = \{su^2, sud, sd^2\}$. Net zoals, in het vorige geval proberen we een portefeuille samen te stellen, die op het eindstip $t = 2$ exact dezelfde waarde heeft als X. Dit nu is i.h.a. onmogelijk voor een *buy and hold* strategie, zoals we die volgden in het één-periode model. Immers, zouden we klakkeloos de daar gevolgde aanpak overnemen, dan zouden te maken krijgen met een stelsel van drie vergelijkingen met twee onbekenden, en dat is in het algemeen strijdig, d.w.z. niet oplosbaar. Echter, we hoeven ons niet te beperken tot buy and hold strategieën, maar kunnen ook tussentijds (op $t = 1$) onze portefeuille herzien. En dat zullen we zodanig doen dat de portefeuille zelffinancierend is, d.w.z. dat we de budgetrestrictie (1.1) repecteren (voor $t = 0$). We hebben dus meer variabelen, nl. $x_2, x_1 = x_0$ en $y_2, y_1 = y_0$. Samen met de budgetrestrictie resulteert dit in precies zoveel variabelen als vergelijkingen, waardoor er hoop is op een unieke oplossing. Dit argument valt precies te maken, en niet alleen voor $N = 2$.

Beter is het om gelijk te kijken naar hoe de procedure uit te voeren valt. We beschouwen een (samengestelde) claim van het type $X = F(s, Z_1, \ldots, Z_N)$ (dus X hangt niet noodzakelijk alleen maar van de eindwaarde S_N af). Ons doel is het vinden van een portefeuille, die we op elk tijdstip binnen de regels mogen aanpassen, met als eigenschap dat op $t = N$ de waarde ervan gelijk is aan de waarde van de claim. M.a.w. op het eindtijdstip N moet de identiteit

$$x_N S_N + y_N B_N = X$$

gelden, hoe de prijsontwikkeling op de markt ook is. Veronderstel dat we vanuit tijdstip $N - 1$ redeneren, en dat we dus S_{N-1} kennen. Dan kan S_N slechts de waarden $S_{N-1}u$ en $S_{N-1}d$ aannemen, afhankelijk van de waarde van Z_N. Derhalve hebben we de twee vergelijkingen in x_N en y_N

$$\begin{aligned} x_N S_{N-1} u + y_N B_N &= F(s, Z_1, \ldots, Z_{N-1}, u) \\ x_N S_{N-1} d + y_N B_N &= F(s, Z_1, \ldots, Z_{N-1}, d). \end{aligned}$$

De oplossing van dit stelsel wordt gegeven door

$$\begin{aligned} x_N &= \frac{F(s,Z_1,\dots,Z_{N-1},u)-F(s,Z_1,\dots,Z_{N-1},d)}{S_{N-1}(u-d)} \\ y_N &= \frac{1}{B_N}\frac{uF(s,Z_1,\dots,Z_{N-1},d)-dF(s,Z_1,\dots,Z_{N-1},u)}{u-d}. \end{aligned}$$

Merk op dat x_N en y_N niet afhangen van Z_N, en dus ook niet van S_N, hetgeen in overeenstemming is met eerder gemaakte afspraken omtrent portefeuilles. De waarde van de hedge portefeuille op tijdstip $N-1$ is $V_{N-1} = x_{N-1}S_{N-1} + y_{N-1}B_{N-1}$ en wegens de eis dat de portefeuille zelffinancierend is, kunnen we dit schrijven als $x_N S_{N-1} + y_N B_{N-1}$. Gebruik makend van de uitdrukkingen voor x_N en y_N krijgen we dan

$$V_{N-1} = \frac{B_{N-1}}{B_N}\left(F(s,Z_1,\dots,Z_{N-1},u)q_u + F(s,Z_1,\dots,Z_{N-1},d)q_d\right), \quad (2.4)$$

met $q_u = \frac{1+r-d}{u-d}$ en $q_d = \frac{u-(1+r)}{u-d}$. Als we de waarden van de stochastische variabelen $Z_1,\dots,Z_{N-1}$ vastpinnen op $z_1,\dots,z_{N-1}$, dan kunnen we de rechterkant van (2.4) schrijven als

$$v_{N-1}(z_1,\dots,z_{N-1}) := \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}F(s,z_1,\dots,z_{N-1},Z_N),$$

waarbij, zoals hierboven, $\mathbb{Q}(Z_N = u) = q_u$.

We proberen nu de waarden van x_{N-1} en y_{N-1} te vinden. Zoals in de vorige stap beschouwen we de twee mogelijkheden voor Z_{N-1} apart. Uit vergelijking (2.4) volgen de twee relaties

$$\begin{aligned} & x_{N-1}S_{N-2}u + y_{N-1}B_{N-1} = \\ & \quad \frac{B_{N-1}}{B_N}\left(F(s,Z_1,\dots,Z_{N-2},u,u)q_u + F(s,Z_1,\dots,Z_{N-2},u,d)q_d\right) \\ & x_{N-1}S_{N-2}d + y_{N-1}B_{N-1} = \\ & \quad \frac{B_{N-1}}{B_N}\left(F(s,Z_1,\dots,Z_{N-2},d,u)q_u + F(s,Z_1,\dots,Z_{N-1},d,d)q_d\right), \end{aligned}$$

die we op de inmiddels bekende wijze kunnen oplossen. Een expliciete uitdrukking laten we achterwege en we bepalen onmiddellijk de waarde van de portefeuille op tijdstip $N-2$. Deze wordt (reken maar na!)

$$\begin{aligned} V_{N-2} = \frac{1}{(1+r)^2}\big(& F(s,Z_1,\dots,Z_{N-2},u,u)q_u^2 \\ & + F(s,Z_1,\dots,Z_{N-2},u,d)q_u q_d \\ & + F(s,Z_1,\dots,Z_{N-2},d,u)q_u q_d \\ & + F(s,Z_1,\dots,Z_{N-2},d,d)q_d^2\big). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Pinnen we de waarden van $Z_1,\dots,Z_{N-2}$ vast op $z_1,\dots,z_{N-2}$. Dan neemt bovenstaande uitdrukking de volgende vorm aan.

$$v_{N-2}(z_1,\dots,z_{N-2}) = \frac{1}{(1+r)^2}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}F(s,z_1,\dots,z_{N-2},Z_{N-1},Z_N), \quad (2.6)$$

waar $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ verwachting aangeeft onder de kansmaat $\mathbb{Q}$ die zo is dat Z_N en Z_{N-1} onafhankelijk en gelijk verdeeld zijn.

Een expliciete uitdrukking voor de waarde van de hedge portefeuille op een willekeurig tijdstip n is niet iets waar je erg vrolijk van wordt, maar (2.6) suggereert een compacte structurele vorm. Op elk tijdstip n, gegeven dat de waarden van $Z_1, \ldots, Z_n$ bekend zijn als $z_1, \ldots, z_n$, is de waarde van de portefeuille

$$v_n(z_1, \ldots, z_n) \quad = \quad \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\, F(s, z_1, \ldots, z_n, Z_{n+1}, \ldots, Z_N). \qquad (2.7)$$

We gebruiken weer de notatie $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ om verwachting onder $\mathbb{Q}$ aan te geven. $\mathbb{Q}$ is nu zo dat $\mathbb{Q}(Z_n = u) = q_u$, $\mathbb{Q}(Z_n = d) = q_d$ voor $n = 1, \ldots, N$ en zo dat de Z_k onafhankelijke variabelen zijn. Men kan de volgende belangrijke eigenschap aantonen: $\mathbb{Q}$ is de *unieke* kansmaat die het proces $\bar{S}$ tot een *martingaal* maakt. Het begrip martingaal is fundamenteel in de moderne kansrekening en financiële wiskunde. We gaan hier niet verder op in.

Voor enkelvoudige claims (zoals de Europese call-optie) kunnen we uitdrukking (2.7) in een alternatieve, maar nog betrekkelijk eenvoudige, vorm expliciet uitschrijven. We kunnen nu $F(s, Z_1, \ldots, Z_N)$ vervangen door $f(s \prod_{i=1}^N Z_i) = f(S_N)$, voor een of andere f. Voor V_n kunnen we dan schrijven

$$V_n =: v_n(S_n) = (1+r)^{-N+n} \sum_{i=0}^{N-n} f(S_n u^i d^{N-n-i}) \binom{N-n}{i} q_u^i q_d^{N-n-i}.$$

Nemen we aan dat S_n de waarde s_n heeft, dan kunnen we deze uitfrukking herschrijven in de vorm $v_n(s_n) = (1+r)^{-N+n} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\, f(s_n \frac{S_N}{S_n})$. De verdisconteerde versie hiervan is

$$\bar{v}_n(s_n) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\, \bar{f}(s_n \frac{S_N}{S_n}). \qquad (2.8)$$

In het al gememoreerde speciale geval van een Europese call-optie (herinner dat $f(x) = (x-K)^+$) reduceert dit tot

$$V_n = (1+r)^{-N+n} \sum_{i \in E(n)} (S_n u^i d^{N-n-i} - K) \binom{N-n}{i} q_u^i q_d^{N-n-i},$$

waar $E(n)$ de verzameling indices i is met $S_n u^i d^{N-n-i} > K$. Dan is $E(n)$ een, eventueel leeg, staartstuk van $\{0, \ldots, N-n\}$. Met $a_n = \inf E(n)$ komt er

$$\begin{aligned}
V_n &= (1+r)^{-N+n} \sum_{i=a_n}^{N-n} (S_n u^i d^{N-n-i} - K) \binom{N-n}{i} q_u^i q_d^{N-n-i} \\
&= (1+r)^{-N+n} \sum_{i=a_n}^{N-n} (S_n u^i d^{N-n-i} - K) \binom{N-n}{i} q_u^i q_d^{N-n-i} \\
&= S_n \sum_{i=a_n}^{N-n} \binom{N-n}{i} \left(\frac{u q_u}{1+r} \right)^i \left(\frac{d q_d}{1+r} \right)^{N-n-i}
\end{aligned}$$

$$- K(1+r)^{n-N} \sum_{i=a_n}^{N-n} \binom{N-n}{i} q_u^i q_d^{N-n-i}. \tag{2.9}$$

Het interessante van deze formule is dat we hem kunnen uitdrukken in binomiale kansen. We voeren de volgende notatie in. Met $\pi(m, p, a)$ duiden we de kans aan dat een $\mathrm{Bin}(m, p)$ verdeelde stochast gelijk is aan of groter dan a. Schrijven we $p_u = \frac{uq_u}{1+r}$ dan wordt (2.9)

$$S_n \pi(N-n, p_u, a_n) - K(1+r)^{-N+n} \pi(N-n, q_u, a_n). \tag{2.10}$$

We laten het expliciet bepalen van x_n en y_n achterwege, het is voor ons van minder belang, en nog een vervelend karwei ook. De belangrijke vaststelling is echter dat deze voor *elke claim* bestaan en alleen afhangen van S_0 t/m S_{n-1}. Met andere woorden, elke claim in de CRR markt kan *gehedged* worden (met een zelffinancierende portefeuille). Men zegt ook wel dat de CRR markt *volledig* is. Het rijtje $(x_n, y_n), n = 1, \ldots, N$ heet ook wel *hedging strategie*. Bovendien geldt ook in het meer-perioden geval dat de Cox-Ross-Rubinstein markt arbitragevrij is onder elke kansmaat $\mathbb{P}$ die equivalent is met $\mathbb{Q}$ als (en alleen als) $d < 1+r < u$.

We sluiten deze paragraaf af met de *Put-Call pariteit*, die de objectieve prijs van een Europese call-optie relateert aan die van een European put-optie. De laatse is niets anders dan de claim $p(S_N) = (K - S_N)^+$. Merk op dat $c(S_N) - p(S_N) = S_N - K$. Duiden we de waarde van de call-optie op tijdstip n aan met C_n en die van de put-optie met P_n, dan valt af te leiden dat geldt

$$C_n - P_n = S_n - (1+r)^{n-N} K. \tag{2.11}$$

3 Limieten in het CRR model

We hebben in de vorige paragraaf gezien dat we de prijs van een Europese call-optie kunnen uitdrukken in binomiale kansen, althans binnen het kader van het CRR model. Voor kansen in termen van binomiale verdelingen met 'grote n' hebben we de beschikking over de Centrale Limietstelling (zie appendix A) om deze te benaderen. Het ligt dus voor de hand dat deze stelling ook van dienst kan zijn bij het bepalen van de prijs van een Europese call-optie. In principe kunnen we direct met formule (2.10) aan de slag als $N - n$ groot is. We willen echter meer en daarom stellen we dit nog even uit.

Het doel is om onder meer de Black-Scholes formules af te leiden. Daarom gaan we subtiel te werk met de parameters die hiervoor een rol speelden. De onderliggende gedachte is dat we een reëel tijdsinterval $[0, T]$ beschouwen dat we in N (een groot getal) heel kleine stukjes hakken, en dan de voorgaande theorie toepassen. Daarbij willen we dat, als we N onbeperkt laten groeien, de prijzen van aandeel en obligatie niet ontploffen. We zullen zien dat we dit inderdaad voor elkaar kunnen krijgen. Veronderstel dat er gehandeld wordt op de tijdstippen $t_n^N = n\Delta_N$ met $\Delta_N = T/N$ en $n = 1, \ldots, N$. Voor elke N beschouwen we dan een CRR model en binnen dit model laten we alle parameters afhangen van N. We maken de volgende keuze. Voor vaste $r, \sigma > 0$ nemen we

$$\begin{aligned} r_N &= \exp(r\Delta_N) - 1 && (3.1)\\ u_N &= \exp(\sigma\sqrt{\Delta_N}) && (3.2)\\ d_N &= \exp(-\sigma\sqrt{\Delta_N}). && (3.3) \end{aligned}$$

Merk op dat (omdat Δ_N klein is) de drie grootheden $1 + r_N$, u_N en d_N alle dichtbij 1 liggen: in een klein tijdsinterval gebeurt er dus weinig. Op eenvoudige wijze laten zich nu limieten berekenen voor de obligatieprijs, waarbij $N \to \infty$. Houd N voorlopig vast en beschouw een parallel proces in discrete tijd van obligatieprijzen B_k^N. De fictieve tijdstippen k corresponderen met de echte tijdstippen t_k^N waar de obligatieprijs aangegeven wordt met $B^N(t_k^N)$. Deze twee prijzen zijn gerelateerd door $B^N(t_k^N) = B_k^N$. Voor t in het interval $[t_k^N, t_{k+1}^N)$ definiëren we $B^N(t) = B^N(t_k^N)$ (de waarde in het linker eindpunt). Op $t = k\Delta_N$ krijgen we dan $B^N(t) = B_k^N = (1 + r_N)^k = \exp(rt)$.
Voor willekeurige t geldt iets dergelijks, maar dan in de limiet. Voor elke $t \in [0, T]$ kiezen we het interval $[t_k^N, t_{k+1}^N)$ dat t bevat. Omdat $k = k(N) = [N\frac{t}{T}]$ kun je gemakkelijk laten zien dat $B^N(t) \to B(t) := \exp(rt)$, de gangbare manier om in continue tijd waardepapieren met constante rente te modelleren.

Voor de aandeelprijzen ligt de zaak aanzienlijk gecompliceerder. Parallel aan de notatie die we voor de obligatieprijs gebruikten introduceren we S_k^N voor de aandeelprijs in het N-de CRR model op het fictieve tijdstip k. Verder nemen we $S^N(t)$ gelijk aan $S^N(t) = S_k^N$ met k zo dat $t \in [t_k^N, t_{k+1}^N)$.
We kijken nu ook naar de risico-neutrale kansen in het N-de CRR model, die we aangeven met $q_u(N)$ en $q_d(N)$. Uit vergelijking (2.3) volgt

$$q_u(N) = \frac{e^{r\Delta_N} - \exp(-\sigma\sqrt{\Delta_N})}{\exp(\sigma\sqrt{\Delta_N}) - \exp(-\sigma\sqrt{\Delta_N})}. \tag{3.4}$$

We anayseren wat hiermee gebeurt als $N \to \infty$. Met behulp van een Taylor benadering blijkt

$$q_u(N) \approx \frac{1}{2} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\sqrt{\Delta_N}}{2\sigma}, \tag{3.5}$$

en dus $q_u(N) \to \frac{1}{2}$. Uiteraard geldt dan ook $q_d(N) \to \frac{1}{2}$. Voor verdere berekeningen zijn de laatste twee beweringen niet precies genoeg, maar met (3.5) blijken we prima uit de voeten te kunnen.

We beperken ons verder tot een Europese call-optie. De objectieve prijs op een tijdstip $t \in [t_n^N, t_{n+1}^N)$ wordt nu gegeven door formule (2.10) met de relevante aanpassingen. Dus gebruiken we $p_u(N) = \frac{u_N q_u(N)}{1+r_N}$ en $a_N(t) = \min\{i : S^N(t)u_N^i d_N^{N-n-i} > K\}$. Merk op dat geldt

$$a_N(t) \approx \frac{\log \frac{K}{S^N(t)d^{N-n}}}{\log \frac{u_N}{d_N}} = \frac{\log \frac{K}{S^N(t)} + (N-n)\sigma\sqrt{\Delta_N}}{2\sigma\sqrt{\Delta_N}}. \tag{3.6}$$

We bepalen nu de limieten van $\pi(N-n, p_u(N), a_N(t))$ en $\pi(N-n, q_u(N), a_N(t))$ voor $N \to \infty$ en gebruiken daarbij dat $\frac{n}{N} \sim \frac{t}{T}$, oftewel $t_n^N \to t$. We voeren nu de hulpstochast Y_N met een $\mathrm{Bin}(N-n, p_N)$ verdeling in. Dan is $\pi(N-n, p_u(N), a_N(t)) = \mathrm{Prob}(Y_N > a_N(t))$. Voor het toepassen van de Centrale limietstelling herschrijven we dit als

$$\mathrm{Prob}(Y_N > a_N(t)) = \mathrm{Prob}(\frac{Y_N - \mathbb{E}\, Y_N}{\sqrt{\mathrm{Var}\, Y_N}} > \alpha_N(t)),$$

met $\alpha_N(t) = (\mathrm{Var}\, Y_N)^{-1/2}(a_N(t) - \mathbb{E}\, Y_N))$. We hebben dus variantie en verwachting van Y_N nodig. Er blijkt te gelden dat $\mathrm{Var}\, Y_N \approx \frac{1}{4}(N-n)$. Enig rekenwerk leert bovendien dat

$$p_u(N) = \frac{u_N q_u(N)}{1+r_N} \approx \frac{1}{2} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\sqrt{\Delta_N}}{2\sigma}. \tag{3.7}$$

Maar dan volgt

$$\begin{aligned} a_N(t) - \mathbb{E}\, Y_N &= a_N(t) - (N-n)p_u(N) \\ &\approx \frac{1}{2\sigma\sqrt{\Delta_N}}\left(\log\frac{K}{S^N(t)} - (T-t)(r + \frac{1}{2}\sigma^2)\right) \end{aligned}$$

zodat

$$\alpha_N(t) \approx \frac{\log\frac{K}{S^N(t)} - (T-t)(r+\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Schrijven we uiteindelijk $S^N(t) = s$ dan vinden we

$$\pi(N-n, p_u(N), a_N(t)) \to \Phi(\frac{\log(s/K) + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}).$$

Voor de kansen $\pi(N-n, q_u(N), a_N(t))$ valt iets dergeljiks uit te rekenen. Het uiteindelijke resultaat is

Stelling 3.1 *Onder de veronderstellingen die gemaakt zijn geldt op tijdstip t waar de prijs van het aandeel gelijk is aan s, dat de objectieve prijs van een Europese call-optie met uitoefenprijs K in benadering gelijk is aan*

$$s\Phi(d_1(t)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2(t)), \tag{3.8}$$

met $d_1(t) = \frac{\log(s/K)+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ *and* $d_2(t) = d_1(t) - \sigma\sqrt{T-t}$.

Vergelijking (3.8) is de beroemde *Black-Scholes formule*.

Niet alleen kunnen we gebruik maken van de Centrale limietstelling voor het approximeren van de prijs van een derivaat, zoals we hierboven hebben gedaan voor een Europese call-optie, ook stelt deze stelling ons in staat de verdeling van de aandeelprijzen (onder $\mathbb{Q}$) zelf te benaderen. Dit is in het licht van het voorgaande niet verrassend, want ook de kansverdeling van $S_N(t)$ is nauw gerelateerd aan een binomiale verdeling.

Propositie 3.2 *Zij* $t_1, \ldots, t_n$ *een eindige stijgende rij in* $[0, T]$. *Onder de eerder gepostuleerde voorwaarden geldt, dat de n-vector met elementen* $\log S^N(t_k) - \log S^N(t_{k-1})$ *in de limiet (voor* $N \to \infty$*) verdeeld is als de n-vector met elementen* $\log S(t_k) - \log S(t_{k-1})$ *die alle een* $N\big((r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_k - t_{k-1}), \sigma^2(t_k - t_{k-1})\big)$ *verdeling hebben en onafhankelijk zijn.*

Een vergelijkbaar resultaat geldt voor het cumulatieve rendementsprocess, dat we zijn tegengekomen in (2.2). In een notatie die analoog is aan die we voor de aandeelprijzen hanteerden, bekijken we $R^N(t) = R_n^N$ als $t \in [t_n^N, t_{n+1}^N)$.

Propositie 3.3 *Zij* $t_1, \ldots, t_n$ *een eindige stijgende rij in* $[0, T]$. *Onder de eerder gepostuleerde voorwaarden geldt, dat de n-vector met elementen* $R^N(t_k) - R^N(t_{k-1})$ *in de limiet (voor* $N \to \infty$*) verdeeld is als de n-vector met elementen* $R(t_k) - R(t_{k-1})$ *die alle normaal* $N\big(r(t_k - t_{k-1}), \sigma^2(t_k - t_{k-1})\big)$ *verdeeld zijn en onafhankelijk.*

De bewering van propositie 3.3 kan als volgt geinterpreteerd worden. Schrijf $\Delta R^N(t_k)$ voor het verschil $R^N(t_k) - R^N(t_{k-1})$, zodat $\Delta R^N(t_k) = (S^N(t_k) - S^N(t_{k-1}))/S^N(t_{k-1}) = \Delta S^N(t_k)/S^N(t_{k-1})$. Zij nu $\Delta\mathcal{B}(t_k)$ een stochast met een $N(0, \Delta t_k)$ verdeling ($\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$). Dan geldt voor $N \to \infty$

$$\Delta S^N(t_k) \approx S^N(t_{k-1})(r\Delta t_k + \sigma\Delta\mathcal{B}(t_k)). \tag{3.9}$$

Deze vergelijking is op te vatten als een gediscretiseerde versie van de *stochastische differentiaalvergelijking* die gebruikt wordt om de evolutie van de prijs van een aandeel te beschrijven in continue-tijdmodellen.

Propositie 3.2 stelt ons direct in staat om voor elk tijdstip t van elke enkelvoudige claim $X = f(S_T^N)$, waar f een begrensde continue functie is (zoals bij een Europese put-optie) de limietprijs te bepalen. Parallel aan vergelijking (2.8) geldt met $S^N(t) = s$ en $U = S^N(T)/S^N(t)$

$$\bar{v}_t^N(s) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^N} \bar{f}(e^U s). \tag{3.10}$$

die in de limiet vervangen mag worden door

$$\bar{v}_t(s) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bar{f}(s e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\, z}) e^{-z^2/2}\, dz. \tag{3.11}$$

4 De Grieken

Het uitgangspunt van deze paragraaf is de Black-Scholes formule (3.8) voor een Europese call-optie. Zoals daaruit blijkt, hangt deze af van een aantal parameters. We onderzoeken nu de gevoeligheid van de waarderingsprijs t.o.v. deze parameters. Hiermee bedoelen we dat we willen kwantificeren hoe kleine veranderingen in elk van die parameters doorwerken als veranderingen in de prijs van de Europese call-optie. De goede verstaander heeft onmiddellijk door dat we hiervoor (partiële) afgeleiden moeten berekenen. Deze zijn inmiddels voorzien van een naam en staan nu bekend onder de verzamelnaam de 'Grieken'.

Hieronder komen ze één voor één aan de beurt, ook de ingeburgerde allochtoon onder hen (de ‘vega’).

We schrijven $C(t,s,r,\sigma)$ voor de uitdrukking in (3.8). Achtereenvolgens introduceren we

1. $\Delta = \frac{\partial C}{\partial s}$ (*delta*)
2. $\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial s^2}$ (*gamma*)
3. $\rho = \frac{\partial C}{\partial r}$ (*rho*)
4. $\Theta = \frac{\partial C}{\partial t}$ (*theta*)
5. $\mathcal{V} = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$ (*vega*)

Natuurlijk hangen de Grieken ook weer af van alle parameters (zie propositie 4.1), maar voor de overzichtelijkheid drukken we dat niet uit in de notatie. In principe vallen deze *gevoeligheidsmaten* te definiëren voor de prijs van elk derivaat. We beperken ons nu voor expliciete formules tot de call-opties, omdat we deze analytisch kunnen bepalen. De formules vatten we samen in onderstaande propositie waarbij we de eerder geïntroduceerde notatie gebruiken en waarin ϕ de dichtheid van de standaard normale verdeling voorstelt. De lezer die niet bang is voor vervelend rekenwerk, wordt uitgenodigd de resultaten te controleren (opgave 5.9).

Propositie 4.1 *De volgende formules gelden.*

$$\begin{aligned}
\Delta &= \Phi(d_1(t)) \\
\Gamma &= \frac{\phi(d_1(t))}{s\sigma\sqrt{T-t}} \\
\rho &= K(T-t)e^{-r(T-t)}\Phi(d_2(t)) \\
\Theta &= -\frac{s\phi(d_1(t))\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}\Phi(d_2(t)) \\
\mathcal{V} &= s\phi(d_1(t))\sqrt{T-t}.
\end{aligned}$$

Het kan om allerlei redenen wenselijk zijn portefeuilles te beheren die niet gevoelig (*neutraal*) zijn voor een van de parameters, de corresponderende afgeleide moet dan (dichtbij) nul zijn. In het algemeen is een gegeven portfeuille dat natuurlijk niet, maar het toevoegen van een of ander derivaat kan dit bewerkstelligen. Stel we bezitten een portefeuille met waarde V (afhankelijk van alle parameters die een rol spelen in het model) en we willen deze delta-neutraal maken door het toevoegen van z eenheden van een of ander derivaat met prijs D. Deze nieuwe portefeuille is delta-neutraal als geldt

$$0 = \frac{\partial V}{\partial s} + z\frac{\partial D}{\partial s}.$$

We zien dus dat we $z = -\frac{\Delta_V}{\Delta_D}$ (de notatie spreekt voor zich) moeten kiezen. Hoewel we in de aantekeningen afzien van transactiekosten zal het duidelijk zijn dat bovenstaande strategie in de praktijk niet verstandig is. Immers het achterliggende idee is dat op elk tijdstip de portefeuille aangepast moet worden om hem delta-neutraal te krijgen. En als 'de' delta van de gegeven portfeuille zelf aan grote veranderingen onderhevig is (dan is $|\Gamma|$ groot), dan zijn voortdurend forse aanpassingen het geval (vergeet niet dat z niet constant is, maar van t afhangt). Doet zich zo'n situtatie voor, dan kunnen we de portfeuille uitbreiden met nog een derivaat om ook gamma-neutraliteit te bewerkstelligen. De keuze van het aandeel zelf als extra component heeft een aantal aantrekkelijke kanten. Stel dat we w aandelen bijkopen, dan zijn de berekeningen als volgt. We eisen nu dus twee dingen:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial V}{\partial s} + z\frac{\partial D}{\partial s} + w\frac{\partial s}{\partial s} \\ 0 &= \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + z\frac{\partial^2 D}{\partial s^2} + w\frac{\partial^2 s}{\partial s^2}. \end{aligned}$$

Oplossen van dit stelsel resulteert (gebruik dat $\frac{\partial s}{\partial s} = 1$ en $\frac{\partial^2 s}{\partial s^2} = 0$) dan in (wederom met voor de hand liggende notatie)

$$\begin{aligned} z &= -\frac{\Gamma_V}{\Gamma_D} \\ w &= \frac{\Gamma_V}{\Gamma_D}\Delta_D - \Delta_V. \end{aligned}$$

En zo kunnen we nog wel een tijdje doorgaan...

5 Opgaven

5.1 Bewijs propositie 2.1.

5.2 (a) Beschouw de claim met uitbetaling S_N. Leid de objectieve prijs ervan af op elk tijdstip $n \leq N$.
(b) Bewijs de uitdrukking (2.11) voor de put-call pariteit.

5.3 Laat zien dat een portfeuille zelffinancierend is als en alleen als (1.2) geldt en als en alleen als (1.3) geldt.

5.4 Leid formule (2.5) af.

5.5 Beschouw in dezelfde CRR markt met vaste einddtijd N twee Europese call-opties met uitoefenprijzen $K_1 > K_2$. Welke van de twee is de duurste?

5.6 Wat is de verdeling van de vector $(R(t_1), \ldots, R(t_n))$ uit propositie 3.3?

5.7 Gebruik vergelijking (3.11) om expliciet de limietprijs van een Europese put-optie (met uitbetaling $(K - S(T))^+$) te bepalen.

5.8 Beschouw de rij CRR modellen van paragraaf 3 en zet de aandeel prijs op tijdstip t vast op s. Zij $C(t)$ de limiet van de prijs op tijdstip t van een Europese call-optie met uitbetaling $(S(T) - K)^+$ en $P(t)$ de prijs op t van de corresponderende put-optie. Leid de limietuitdrukking $C(t) - P(t) = s - e^{-r(T-t)}K$ voor de put-call pariteit af. Gebruik het resultaat van opgave 5.7 om bij de Black-Scholes formule (3.8) aan te landen.

5.9 Leid eerst af dat geldt

$$s\phi(d_1(t)) - Ke^{-r(T-t)}\phi(d_2(t)) = 0,$$

en daarmee de uitdrukkingen voor de Grieken in propositie 4.1.

A De Centrale limietstelling

We geven twee versies van de Centrale limietstelling. In de eerste beschouwen we dubbel geïndiceerde rijen. Voor elke $n \in \mathbb{N}$ en k_n zijn er stochasten $X_{n,k}$, waarbij $k = 1, \ldots, k_n$.

Stelling A.1 *Beschouw zo'n dubbelrij* $\{X_{n,k} : n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, k_n\}$ *met* $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$. *Veronderstel dat voor elke* n *de stochasten* $X_{n,k}$ *voor* $k = 1, \ldots, k_n$ *onafhankelijk en gelijk verdeeld zijn. Definieer* $S_n = \sum_{k=1}^{k_n}(X_{n,k} - \mathbb{E}\, X_{n,k})$. *Veronderstel bovendien dat* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\, S_n^2 = \sigma^2$ *met* $\sigma^2 \in (0, \infty)$. *Dan geldt*

$$\mathbb{P}(S_n \leq \sigma x) \to \Phi(x).$$

De bekendste versie van de Centrale limietstelling is stelling A.2. Het betreft hier een speciaal geval van stelling A.1, hetgeen we na de formulering van de stelling toelichten.

Stelling A.2 *Zij* $X_1, X_2, \ldots$ *een onafhankelijke rij van gelijk verdeelde stochasten met verwachting* μ *en positieve variantie* $\sigma^2 < \infty$. *Dan geldt voor alle* $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} \leq x) \to \Phi(x),$$

als $n \to \infty$, *waarbij* Φ *de verdelingsfunctie van de standaard normale verdeling voorstelt.*

Kies nu met de X_k uit stelling A.2 de $X_{n,k}$ in stelling A.1 gelijk aan $\frac{X_k}{\sigma\sqrt{n}}$ en $k_n = n$ Dan wordt S_n gelijk aan $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}}$ en bovendien is nu $\operatorname{Var} S_n = 1$. Inderdaad is de tweede stelling een bijzonder geval van de eerste.