Jaap Korevaar
Korteweg de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
Postbus 94248
1090 GE Amsterdam
J.Korevaar@uva.nl

Onderzoek

Hoe springen de priemgetallen?

Over de precieze verdeling van de priemgetallen is nog heel veel onbekend. Over de sprongen tussen twee opeenvolgende priemgetallen is maar weinig echt bewezen. Men weet bijvoorbeeld niet of alle even getallen als sprong voorkomen, laat staan of ze oneindig vaak als sprong voorkomen. Er zijn plausibele vermoedens die numeriek goed kloppen voor zo ver als men kan rekenen. En er zijn interessante vermoedens over de sprong die het meest voorkomt en over patronen van sprongen. Jaap Korevaar hield op 23 april 2010 een voordracht aan de Universiteit van Amsterdam in de serie 'Leve de wiskunde!', waarop dit artikel gebaseerd is.

Dit artikel gaat over de rij *priemgetallen*

$$p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 = 5 < p_4 = 7 < p_5 = 11 < \cdots$$

Dus over de gehele getallen groter dan 1, die alleen deelbaar zijn door 1 en zichzelf. Meer in het bijzonder zijn we geïnteresseerd in de *sprongen*

$$p_{n+1} - p_n$$

tussen opeenvolgende priemgetallen.

Voor een eerste oriëntatie is het goed om naar een tabel van priemgetallen te kijken. Op het Internet kan men heel wat van zulke tabellen vinden; zie bijvoorbeeld [30–31]. De priemgetallen zijn tamelijk onregelmatig verdeeld onder de gehele getallen, maar ze komen geleidelijk minder dicht te liggen. In Tabel 1 staan de 168 priemgetallen tot 1000.

We tellen de sprongen $p_{n+1} - p_n$ in de tabel. Er is één sprong gelijk aan 1. De sprong 2 komt 35 keer voor, de sprong 4 komt 40 keer voor, en de sprong 6 komt met 44 keer het meest voor. Verder zijn er 15 sprongen 8, 16 sprongen 10, 7 sprongen 12, 7 sprongen 14, één sprong 18 en één grootste sprong van 20.

De gemiddelde sprong tot 1000 is gelijk aan de totale sprong, $997 - 2 = 995$, gedeeld door het aantal sprongen, $168 - 1 = 167$. Het quotiënt $5.958\ldots$ ligt dicht bij 6, de sprong die het meest voorkomt tot 1000.

Over de *gemiddelde sprong* onder de priemgetallen tot grote x geeft de *priemgetalstelling* informatie.

Priemgetalstelling en gemiddelde sprong

Op grond van tabellen kwamen Gauss en Legendre omstreeks 1800 tot het volgende vermoeden. Het aantal $\pi(x)$ van de priemgetallen $p \leq x$ is *asymptotisch gelijk* aan x, gedeeld door de natuurlijke logaritme $\log x$. Notatie: $\pi(x) \sim x/\log x$, en dit betekent dat het quotiënt van beide grootheden limiet 1 heeft:

$$\frac{\pi(x)}{x/\log x} \to 1 \quad \text{als } x \to \infty. \tag{1}$$

Het vermoeden van Gauss en Legendre heeft veel belangrijk onderzoek geïnspireerd, met name van Riemann, zie sectie 'Opmerkingen over de priemgetalstelling'. De eerste volledige bewijzen van (1) werden in 1896 gegeven door Hadamard en De la Vallée Poussin, min of meer onafhankelijk van elkaar:

Stelling 1 [Priemgetalstelling]. *Relatie* (1) *is juist.*

Gevolg 2. *Zij p_n het grootste priemgetal $\leq x$. Dan geldt $p_n \sim x$ als $x \to \infty$.*

Inderdaad, voor elk getal $\varepsilon \in (0, 1)$ ligt er

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541
547	557	563	569	571	577	587	593	599	601
607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733
739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997		

Tabel 1 De priemgetallen tot 1000

een priemgetal tussen $(1-\varepsilon)x$ en x wanneer x voldoende groot is. Immers,

$$\pi\{(1-\varepsilon)x\} \sim \frac{(1-\varepsilon)x}{\log\{(1-\varepsilon)x\}} \sim (1-\varepsilon)\frac{x}{\log x} \quad \text{als} \quad x \to \infty.$$

Stelling 3. *Voor grote x is de gemiddelde sprong onder de priemgetallen $\leq x$ ruwweg* (preciezer: asymptotisch) *gelijk aan* $\log x$.

Inderdaad, als p_n het laatste priemgetal is $\leq x$, dan is de som van de sprongen tot en met x gelijk aan

$$p_n - p_1 \sim x.$$

Het aantal sprongen is gelijk aan $n-1 = \pi(x) - 1 \sim x/\log x$, dus de gemiddelde sprong tot x is gelijk aan

$$\frac{p_n - p_1}{\pi(x)-1} \sim \frac{x}{x/\log x} \sim \log x \quad \text{als} \quad x \to \infty.$$

Men kan de priemgetalstelling ook formuleren in termen van het n-de priemgetal:

$$p_n \sim n \log n \quad \text{als} \quad n \to \infty. \qquad (2)$$

Dit zegt echter heel weinig over de sprongen $p_{n+1} - p_n$.

Relatie (2) kan uit (1) afgeleid worden door $x = p_n$ te nemen.

Opmerkingen over de priemgetalstelling

Gauss had al opgemerkt, dat de logaritmische integraal

$$\text{li}(x) \int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \cdots$$

waarschijnlijk een betere benadering geeft voor $\pi(x)$ dan $x/\log x$. Riemanns baanbrekende werk ondersteunde dit vermoeden. Hij gaf een expliciete formule voor $\pi(x) - \text{li}(x)$ in termen van de nulpunten van de zogenaamde zetafunctie $\zeta(s)$, die voor alle complexe waarden van s gedefinieerd kan worden; zie bijvoorbeeld Ingham [16] of Edwards [6]. Riemann sprak het vermoeden uit dat de complexe nulpunten van $\zeta(s)$ allemaal reëel deel $\frac{1}{2}$ hebben. Uit dit nog altijd niet bewezen 'Riemann vermoeden' zou volgen dat voor grote x:

$$\text{de afwijking } |\pi(x) - \text{li}(x)| \text{ is niet veel groter dan } \sqrt{x} \qquad (3)$$

(en omgekeerd).

Tabellen ondersteunen zo'n resultaat. Zij leidden lang geleden ook tot het vermoeden dat altijd $\pi(x) < \text{li}(x)$, maar dit is onjuist. In 1914 liet Littlewood [21] zien, dat het verschil $\pi(x) - \text{li}(x)$ oneindig vaak van teken moet wisselen; vergelijk Ingham [16]. Sinds kort weet men met vrij grote zekerheid, dat de eerste tekenwisseling optreedt tussen $x = 10^{316}$ en $x = 10^{317}$; zie Bays and Hudson [1]. Die getallen zijn nog altijd veel te groot om met computers de eerste tekenwisseling precies te localiseren. De moraal van Littlewoods resultaat is, dat men voorzichtig moet zijn met vermoedens, die alleen gebaseerd zijn op numeriek werk!

De eerste volledige bewijzen van de priemgetalstelling (uit 1896) waren tamelijk ingewikkeld. Later kwamen er aanzienlijk eenvoudigere bewijzen, de meeste gebaseerd op zogenaamde Tauberstellingen; zie bijvoorbeeld [17–18].

Grote sprongen; grootste sprong tot x

Het is eenvoudig te bewijzen dat er *willekeurig grote* sprongen zijn in de rij priemgetallen. Preciezer gezegd, voor elk gegeven getal k komt er een sprong $\geq k$ voor. Voor $k \geq 2$ volgt dit uit het rijtje

$$k!+2,\ k!+3,\ \cdots,\ k!+k. \qquad (4)$$

Al deze $k-1$ opeenvolgende getallen zijn samengesteld. Als nu p_n het grootste priemgetal is $\leq k!+1$, dan is $p_{n+1} \geq k!+k+1$, en dus

$$p_{n+1} - p_n \geq k.$$

Kan men hieruit iets afleiden over de orde van de grootste sprong tot x? Zij

$$G(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{p_{n+1} \leq x} (p_{n+1} - p_n).$$

Bepaalde kansbeschouwingen door Cramér [5] hebben tot het vermoeden geleid, dat $G(x)$ van de orde $\log^2 x$ is; vergelijk Tenenbaum en Mendès France [32], en Heath-Brown [15]. Het rijtje (4) geeft voor $k!+k \leq x$ alleen maar een sprong tot x van de orde $(\log x)/\log\log x$, dus kleiner dan de gemiddelde sprong $\log x$! Door slimmere rijtjes te gebruiken konden Erdős [8] en Rankin [28] betere resultaten verkrijgen. Rankin bepaalde een constante $c > 0$ zodanig, dat voor $x \to \infty$,

$$G(x) \geq \{c + o(1)\} \log x \cdot \frac{(\log\log x)\log\log\log\log x}{(\log\log\log x)^2}.$$

Zie ook Maier en Pomerance [22].

De orde van deze ondergrens is veel kleiner dan $\log^2 x$! Het zou natuurlijk kunnen dat $G(x)$ die (of een andere) bijzondere orde van grootte alleen bereikt voor *speciale* $x \to \infty$.

Er is veel numeriek werk gedaan over grote sprongen. Nicely [24] vermeldt een sprong van 906 na het priemgetal

$$218.209.405.436.543.$$

Hij citeert ook een persoonlijke mededeling van H. Dubner, dat deze een sprong van 12.540 heeft gevonden na een priemgetal van 385 cijfers. De referee herinnerde me eraan, dat het numerieke werk van Nicely geleid heeft tot de ontdekking van een ondeugdelijk type processor in computers.

Open probleem. Men verwacht, dat *alle* even getallen $2r$ als sprong voorkomen in de rij priemgetallen. Maar onvoorwaardelijk *bewezen* is het niet; zie sectie 'Sprongen van de algemene vorm $2r$'.

Is er een sprong die oneindig vaak voorkomt?

Komt de sprong 2 oneindig vaak voor? Waarschijnlijk wel, maar het is niet bewezen. Met een sprong 2 correspondeert een zogenaamde *priemtweeling*, een paar $(p,\ p+2)$ met p en $p+2$ beiden priem. Er zijn enorm grote priemtweelingen bekend. Op het Internet (zie: Twin prime [33], augustus 2009) vindt men de tweeling

$$65.516.468.355 \times 2^{333.333} \pm 1.$$

Het gaat hier om getallen van 100.355 cijfers!

Er is van geen enkele sprong bewezen dat hij oneindig vaak voorkomt. Wel hebben Goldston, Pintz en Yildirim [12] onder een zeer *sterke hypothese* aangetoond, dat oneindig vaak

$$p_{n+1} - p_n \leq 16.$$

(Voor een schets van het lange bewijs, zie Soundararajan [29].) Uit het resultaat volgt, dat er tenminste één sprong ≤ 16 oneindig vaak moet voorkomen.

De sterke hypothese van [12] gaat terug op Elliott en Halberstam [7]. Hij houdt in, dat alle rekenkundige rijen die daarvoor in aanmerking komen, in een bepaalde zin evenveel priemgetallen bevatten, mits men met gewogen aantallen werkt. Een zwakkere vorm van die hypothese is bewezen.

Hoeveel sprongen 2 verwacht men tot x?

Wat is de *kans* dat een paar getallen $(n,\ n+2)$, met $n+2 \leq x$, of $n \leq x$, een priemtweeling is? We gebruiken de notatie $\pi_2(x)$ voor het aantal priemtweelingen $(p,\, p+2)$ met $p \leq x$.

Stel dat de priemgetallen min of meer *volgens toeval* verdeeld zijn onder de gehele getallen. Dan is de kans dat een willekeurige $n \leq x$ priem is, ongeveer gelijk aan $1/\log x$. Inderdaad, het aantal priemgetallen $\leq x$ is gelijk aan $\pi(x)$, en het aantal gehele getallen $\leq x$ is gelijk aan $[x]$, het gehele deel van x. Voor het quotiënt geldt dus wegens de priemgetalstelling,

$$\frac{\pi(x)}{[x]} \sim \frac{x/\log x}{[x]} \sim \frac{1}{\log x}.$$

De kans dat $n+2$ priem is zou ook ongeveer $1/\log x$ zijn, dus de kans, dat ze allebei priem zijn, is ongeveer $1/\log^2 x$. Men zal dus verwachten, dat $\pi_2(x)$ in de buurt van $x/\log^2 x$ moet liggen.

Natuurlijk deugt deze redenering niet echt. Als n even is kunnen n en $n+2$ niet allebei priem zijn. Voor oneven $n > 2$ zijn de kansen dat n en $n+2$ allebei priem zijn niet onafhankelijk. Maar men kan correcties aanbrengen; zie de artikelen van Pólya [27] en Soundararajan [29], en het boek van Tenenbaum en Mendès France [32]. Zo kan men het beroemde Hardy–Littlewood vermoeden [14] voor $\pi_2(x)$ hieronder plausibel maken. Die auteurs gebruikten in 1923 overigens een andere redenering, gebaseerd op hun (toen nieuwe) cirkelmethode.

Vermoeden 4 [Hardy en Littlewood]. *Men heeft*

$$\pi_2(x) \sim K_2 \frac{x}{\log^2 x} \quad \textit{als} \quad x \to \infty. \tag{5}$$

Hier wordt de constante K_2 (meestal geschreven als $2C_2$) gegeven door

$$\begin{aligned} K_2 &\stackrel{\text{def}}{=} 2 \prod_{p \text{ priem},\, p>2} \frac{1-2/p}{(1-1/p)^2} \\ &= 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{15}{16} \times \frac{35}{36} \times \frac{99}{100} \times \cdots \\ &\approx 1.32032. \end{aligned}$$

Numerieke berekeningen zijn in goede overeenstemming met bovenstaand vermoeden, maar het is beter om de vergelijkingsfunctie $x/\log^2 x$ in (5) te vervangen door de logaritmische integraal van de orde twee:

$$\mathrm{li}_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} \sim \frac{x}{\log^2 x}.$$

$2r \backslash x$	10^4	10^8	10^{12}	K_{2r}/K_2
2	205	440312	1870585220	1
4	203	440258	1870585459	1
6	411	879908	3741217498	2
8	208	439908	1870580394	1
10	270	586811	2494056601	4/3
12	404	880196	3741051790	2
14	245	528095	2244614812	6/5
22	226	489085	2078443752	10/9
30	536	1173934	4988150875	8/3
210	641	1409150	5985825351	16/5
$L_2(x)$:	214	440368	1870559867	

Tabel 2 $\pi_{2r}(x)$ voor speciale waarden $2r$ en x

Zie Tabel 2, en tellingen van Nicely [25] voor x lopend tot 10^{16}. Op het Internet wordt ook een telling tot 10^{18} vermeld; zie Twin prime [33]. De tellingen suggereren, dat analoog met (3):

de afwijking $|\pi_2(x) - K_2\,\mathrm{li}_2(x)|$
is niet veel groter dan $\sqrt{x}$.

Met behulp van een verfijnde zeefmethode heeft Jie Wu [34] bewezen dat $\pi_2(x) < (3.4)K_2 x/\log^2 x$ voor alle grote x.

Algemene priemparen $(p,\, p+2r)$
Hardy en Littlewood stelden ook een vermoeden op voor de telfunctie $\pi_{2r}(x)$ van algemene priemparen $(p,\, p+2r)$ met $p \leq x$. Dat vermoeden luidt als volgt: voor $x \to \infty$ heeft men

$$\pi_{2r}(x) \sim K_{2r}\,\mathrm{li}_2(x) \sim K_{2r} \frac{x}{\log^2 x},$$

waar

$$K_{2r} \stackrel{\text{def}}{=} K_2 \prod_{p|r,\, p>2} \frac{p-1}{p-2}. \tag{6}$$

(Het gaat hier om een product over de *verschillende* oneven priemfactoren van r.) In het bijzonder geldt $K_4 = K_2$, $K_6 = 2K_2$, $K_{30} = \frac{8}{3}K_2$, $K_{210} = \frac{16}{5}K_2$. Met de speciale waarde

$$2r = P_q \stackrel{\text{def}}{=} p_1 p_2 \cdots p_q,$$

het product van de eerste q priemgetallen, correspondeert de constante

$$K_{P_q} = K_2 \times \frac{2}{1} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{p_q - 1}{p_q - 2},$$

die groter is dan de constanten voor naburige waarden van $2r$; zie sectie 'De meest voorkomende sprongen'. Voor $q \to \infty$ gaat de constante K_{P_q} naar oneindig, terwijl de volledige rij $\{K_{2r}\}$ middelwaarde 2 heeft. In een formule uitgedrukt:

$$(K_2 + K_4 + \cdots + K_{2N})/N \to 2 \quad \text{als} \quad N \to \infty.$$

Een eenvoudig bewijs van deze formule staat in een recente preprint van Van de Bult en Korevaar [3]. Goede schattingen voor het verschil tussen het linkerlid en het rechterlid waren overigens al veel vroeger gevonden door Bombieri en Davenport [2], en Friedlander en Goldston [10].

Berekeningen van $\pi_{2r}(x)$ met $2r \leq 5 \cdot 10^3$ en $x = 10^3, 10^4, \cdots, 10^{12}$ ondersteunen het Hardy–Littlewood vermoeden; zie Tabel 2. (Voor een uitvoeriger tabel, zie Korevaar en Te Riele [20].) De laatste regel in de tabel geeft (afgeronde) waarden $L_2(x)$ van de vergelijkingsfunctie $K_2\mathrm{li}_2(x)$ voor $\pi_2(x)$.

In het bijzonder ziet men uit de tabel dat voor grote x,

$$\pi_4(x) \approx \pi_2(x), \quad \text{en} \quad \pi_6(x) \approx 2\pi_2(x). \tag{7}$$

Onderzoeksprobleem. Men is nog ver verwijderd van een bewijs van het algemene Hardy–Littlewood vermoeden. Maar zou men met een slimme aanpak, en aannemend dat $\pi_2(x) \to \infty$, de relaties (7) direct kunnen bewijzen?

Opmerking 5. *Uit het werk van Montgomery [23] blijkt, dat er een subtiel verband is tussen de Hardy–Littlewood vermoedens en de fijne verdeling van de complexe nulpunten van de zetafunctie; zie Korevaar [19].*

Sprongen van de algemene vorm $2r$
We kunnen nu iets zeggen over sprongen in de rij priemgetallen van de vorm $2r$; vergelijk Erdős en Straus [9].

Stelling 6. *Als de Hardy–Littlewood vermoedens voor de telfuncties $\pi_{2r}(x)$ waar zijn, komt elke even sprong $2r$ oneindig vaak voor in de rij priemgetallen. Het aantal sprongen $2r$ tot x, notatie $s_{2r}(x)$, zal zelfs asymptotisch gelijk zijn aan $\pi_{2r}(x)$.*

We verifiëren dit voor het geval $2r = 6$. Stel dus dat

$$\pi_6(x) \sim K_6 x/\log^2 x \quad \text{als} \quad x \to \infty.$$

Dan geldt ook

$$\pi_6(x-6) \sim K_6 x/\log^2 x.$$

Beschouw nu een willekeurig priempaar $(p,\ p+6)$ met $p+6 \le x$. Als er een priemgetal ligt tussen p en $p+6$ hebben we een priemtriplet $(p,\ p+2,\ p+6)$ of $(p,\ p+4,\ p+6)$. Het aantal daarvan met $p+6 \le x$ is echter van lagere orde dan $x/\log^2 x$, namelijk, $\le Cx/\log^3 x$. [De auteur dankt D.R. Heath-Brown voor de volgende algemene verwijzing. Voor gegeven ongelijke getallen $r_j \ge 0$ staat er in Halberstam en Richert [13], sectie 5.7, een bovengrens $Cx/\log^k x$ voor het aantal priem k-tupletten $\{p+2r_1, \cdots, p+2r_k\}$ met $p \le x$.] Het aantal priemparen $(p,\ p+6)$ met $p+6 \le x$, waarbij er *geen* priemgetal ligt tussen p en $p+6$, is dus ook asymptotisch gelijk aan $K_6 x/\log^2 x$.

Onderzoeksprobleem. Zou men met behulp van slim zeven misschien kunnen bewijzen, dat als er oneindig veel priemparen $(p,\ p+6)$ zijn, er ook oneindig veel sprongen 6 moeten zijn in de rij priemgetallen? Priemtripletten zouden altijd zeldzamer moeten zijn dan priemparen!

Opmerking 7. *We zullen in het volgende zien, dat sprongen van de speciale vorm*

$$p_{n+1} - p_n = 2r = P_q = p_1 p_2 \cdots p_q \quad (\textit{met vaste } q)$$

een bijzondere rol spelen.

De meest voorkomende sprongen

We zagen in de inleiding dat bij de priemgetallen ≤ 1000, de sprong 6 het meest voorkomt. De sprong die tot x het meest optreedt noemen we de *favoriete sprong* tot x. Men kan uit Tabel 1 afleiden, dat 2 en 4 afwisselend favoriet zijn voor $3 \le x \le 173$. Voor $x = 179$ komt 6 er even bij. Vanaf $x = 379$ gaat 6 echt als favoriet meedoen. Voor $x = 941$ deelt 4 voor het laatst de eer met 6. In het verleden heeft men wel gedacht, dat 6 vanaf $x = 947$ altijd de favoriete sprong zou blijven.

Onder aanname van de Hardy–Littlewood vermoedens konden Erdős en Straus in 1980 [9] echter laten zien dat dit niet waar is:

Stelling 8. *De meest voorkomende sprong in de rij priemgetallen tot x gaat naar oneindig wanneer $x \to \infty$.*

Bewijs. Uit de Hardy–Littlewood vermoedens volgt dat voor $P_q = p_1 \cdots p_q$ geldt

$$\pi_{P_q}(x) \sim K_{P_q} \frac{x}{\log^2 x}.$$

Bekijk nu de priemparen $(p,\ p+P_q)$ met $p \le x$. Als er een priemgetal p' ligt tussen p en $p+P_q$ hebben we te maken met een priemtriplet $(p,\ p',\ p+P_q)$, waarbij $p \le x$. Voor zulke tripletten zijn er bij gegeven p maar eindig veel mogelijkheden, en het totale aantal van die tripletten is dus $\le Cx/\log^3 x$; zie sectie 'Sprongen van de algemene vorm $2r$'. Het aantal priemparen $(p,\ p+P_q)$ met $p \le x$, waarbij $p+P_q$ het eerste priemgetal is na p, is dus asymptotisch gelijk aan $\pi_{P_q}(x)$. Hieruit volgt, dat voor het aantal $s_{P_q}(x)$ van de sprongen P_q in de rij priemgetallen tot x geldt

$$s_{P_q}(x) \sim K_{P_q} \frac{x}{\log^2 x}.$$

We laten nu zien dat voor elk even getal $2r < P_q = p_1 p_2 \cdots p_q$ geldt

$$K_{2r} < K_{P_q}. \tag{8}$$

Voor een bewijs van (8) mag men aannemen, dat de verschillende priemfactoren van $2r$ allemaal maar één keer voorkomen, zodat

$$\begin{aligned} &2r = p_1 p_{n_2} \cdots p_{n_m}, \\ &\text{met } \ p_1 = 2 < p_{n_2} < \cdots < p_{n_m}. \end{aligned} \tag{9}$$

Inderdaad, stel dat

$$2r = p_1^{\alpha_1} p_{n_2}^{\alpha_2} \cdots p_{n_m}^{\alpha_m},$$

waarbij tenminste één exponent α_j groter is dan 1. Definieer nu

$$2r' = p_1 p_{n_2} \cdots p_{n_m}.$$

Dan geldt $2r' < P_q$, en uit (6) volgt dat $K_{2r'} = K_{2r}$. In het bewijs van (8) kan men dan r vervangen door r'.

We gaan verder met (9) en $2r < P_q$. Er zijn nu twee mogelijkheden. Als $p_{n_2} = p_2, \cdots, p_{n_m} = p_m$ moet $m < q$, en dan volgt (8) meteen uit (6). In het andere geval kijken we naar de eerste factor p_{n_k} die verschilt van p_k, dus groter is. Dan vervangen we p_{n_k} door p_k en krijgen zo een product $2r'' < 2r < P_q$; de corresponderende constante $K_{2r''}$ is groter dan K_{2r}. Zo doorgaande krijgen we tenslotte een product $2r^*$ van verschillende priemfactoren, dat kleiner is dan P_q. De bijbehorende constante is groter dan K_{2r}, maar zal kleiner zijn dan K_{P_q}. Hiermee is (8) bewezen.

Als gevolg zal voor elke gekozen $2r < P_q$ en $x \ge$ zekere x_{2r},

$$s_{2r}(x) < s_{P_q}(x).$$

Een sprong $2r < P_q$ kan dus niet de favoriete sprong zijn tot x wanneer $x \ge \max x_{2r}$ voor $2r < P_q$. De favoriete sprong moet dan minstens gelijk zijn aan P_q. $\square$

In 1999 hebben Odlyzko, Rubinstein en Wolf [26] laten zien, dat de sprong 6 de eer van favoriet (in hun terminologie: 'jumping champion') moet overdragen aan 30 in de buurt van $x = 1.7 \times 10^{35}$. Vervolgens zou 30 als favoriet onttroond worden door 210 in de buurt van $x = 10^{425}$. Zij spraken het vermoeden uit, dat de favoriete sprongen in de regel gevormd worden door de getallen $P_q = p_1 p_2 \cdots p_q$, en dit over zeer lange intervallen van steeds grotere x. Het is echter niet duidelijk wat er precies gebeurt bij de overgangen.

Goldston en Ledoan [11] hebben recent bewezen, dat voor elke q, en voor alle $x \ge$ heel grote x'_q, de favoriete sprongen deelbaar moeten zijn door het product $P_q = p_1 p_2 \cdots p_q$.

Bijzondere patronen van sprongen

De sprong 2 kan niet twee keer achtereen voorkomen in de rij priemgetallen. Immers, van elk drietal getallen n, $n+2$, $n+4$ is er één door drie deelbaar. Hetzelfde geldt bijvoorbeeld voor sprongen 4, 8, 10, 14, 16.

Sprongen 6 kunnen twee keer en zelfs drie keer achter elkaar voorkomen. Zie bijvoorbeeld het rijtje opeenvolgende priemgetallen 251, 257, 263, 269. Drie opeenvolgende sprongen 12 of 18 lijken ook te kunnen. Vier keer achtereen een sprong 6 kan echter niet. (Waarom niet?)

Zij nu $R = \{2r_1, 2r_2, \cdots, 2r_k\}$ een toenemend rijtje van k niet-negatieve even getallen. Stel dat we willen onderzoeken of de getallen in het k-tuplet $R_n = \{n+2r_1, n+2r_2, \cdots, n+2r_k\}$ allemaal priem kunnen zijn. Voor een gegeven priemgetal p definiëren we $\nu_R(p)$ als het aantal verschillende restklassen (mod p) dat door R wordt bezet. Als $\nu_R(p) = p$ voor een of ander priemgetal p (dat wil zeggen, alle restklassen bezet), dan is voor elke n minstens een van de getallen in R_n door p deelbaar. In dat geval kunnen er hoostens eindig veel k-tupletten R_n geheel uit priemgetallen bestaan.

Voor het bestaan van oneindig veel priemtupletten R_n is dus *nodig*, dat $\nu_R(p) < p$ voor *alle* priemgetallen p.

Hardy en Littlewood [14] spraken het vermoeden uit, dat deze voorwaarde ook *voldoende* is voor het bestaan van oneindig veel priemtupletten R_n. Preciezer luidt hun algemene vermoeden als volgt:

Vermoeden 9. *Zij $\pi_R(x)$ het aantal priemtupletten R_n met $n \le x$. Dan geldt voor $x \to \infty$,*

$$\pi_R(x) \sim K(R)\,\mathrm{li}_k(x),$$

waar

$$\mathrm{li}_k(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log^k t} \sim \frac{x}{\log^k x},$$

en

$$K(R) = \prod_{p \text{ priem}} \frac{1 - \nu_R(p)/p}{(1 - 1/p)^k}.$$

Het oneindige product is absoluut convergent. Dit volgt uit het feit dat $\nu_R(p) = k$ voor alle $p > 2r_k$, zodat voor $p \to \infty$,

$$\{1 - \nu_R(p)/p\}/(1 - 1/p)^k = 1 + O(1/p^2).$$

Toepassing. Als het algemene Hardy–Littlewood vermoeden waar is, dan zullen er oneindig vaak vijf opeenvolgende sprongen 30 voorkomen. Het aantal van die vijftallen tot x zal asymptotisch gelijk zijn aan een positieve constante maal $x/\log^6 x$. Algemener zullen er oneindig vaak $(p_{n+1} - 2)$ opeenvolgende sprongen van de grootte $P_n = p_1 p_2 \cdots p_n$ voorkomen, enzovoort.

Voor een bewijs in het geval van $P_3 = 30$ beschouwt men het rijtje

$$R = \{0, 30, 60, 90, 120, 150\}.$$

Hiervoor geldt $\nu(2) = \nu(3) = \nu(5) = 1$, dus $\nu(p) < p$ voor alle priemgetallen p. Het aantal priemzestallen

$$\{p,\ p+30,\ p+60,\ p+90,\ p+120,\ p+150\} \tag{10}$$

met $p \le x$ zal dan asymptotisch gelijk zijn aan $K(R)x/\log^6 x$ (Hardy–Littlewood). Wanneer er nog een extra priemgetal is tussen p en $p+150$ hebben we te maken met een priemzevental. Er kunnen zulke zeventallen voorkomen van verschillende patronen, maar het totale aantal daarvan met $p \le x$ is hoogstens van de orde $x/\log^7 x$; zie sectie 'Sprongen van de algemene vorm $2r$'. Het aantal priemzestallen (10) *zonder* een tussenliggend zevende priemgetal is dus ook asymptotisch gelijk aan $K(R)x/\log^6 x$.

Referenties

1 C. Bays en R. Hudson, *A new bound for the smallest x with $\pi(x) > \mathrm{li}(x)$*. Math. Comp. **69** (2000), 1285–1296.

2 E. Bombieri en H. Davenport, *Small differences between prime numbers*. Proc. Roy. Soc. Ser. A **293** (1966), 1–18.

3 F.J. van de Bult en J. Korevaar, *Mean value one of prime-pair constants*. Zie arXiv:0806.1667v1 [math.NT], June 2008.

4 J. van de Craats, *Open priemproblemen*. Pythagoras **45**, nr 2 (2005), 4–10.

5 H. Cramér, *On the order of magnitude of the differences between consecutive prime numbers*. Acta Arith. **2** (1936), 396–403.

6 H.M. Edwards, *Riemann's zeta function*. Academic Press, New York, 1974.

7 P.D.T.A. Elliott en H. Halberstam, *A conjecture in prime number theory*. Symposia Mathematica, vol. 4 (INDAM, Rome, 1968/69), pp 59–72. Academic Press, London.

8 P. Erdős, *On the difference of consecutive primes*. Quart. J. Math. Oxford, Ser (2) **6** (1935), 124–128.

9 P. Erdős en E.G. Straus, *Remarks on the differences between consecutive primes*. Elem. Math. **35** (1980), 115–118.

10 J.B. Friedlander en D.A. Goldston, *Some singular series averages and the distribution of Goldbach numbers in short intervals*. Illinois J. Math. **39** (1995), 158–180.

11 D. Goldston en A.H. Ledoan, *Jumping champions and gaps between consecutive primes*. Zie arXiv:0910.2960v1 [math.NT], 15 Oct 2009.

12 D. Goldston, J. Pintz en C.Y. Yildirim, *Primes in tuples. I*. Ann. of Math. (2) **170** (2009), 819–862.

13 H. Halberstam en H.-E. Richert, *Sieve methods*. Academic Press, London, 1974.

14 G.H. Hardy en J.E. Littlewood, *Some problems of 'partitio numerorum' III, On the expression of a number as a sum of primes*. Acta Math. **44** (1923), 1–70.

15 D.R. Heath-Brown, *Prime number theory and the Riemann zeta-function*. Recent perspectives in random matrix theory and number theory, 1–30. London Math. Soc. Lecture Note Ser. 322, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.

16 A.E. Ingham, *The distribution of prime numbers*. Reprint of the 1932 original, with a foreword by R. C. Vaughan. Cambridge Univ. Press, 1990.

17 J. Korevaar, *Een eenvoudig bewijs van de priemgetalstelling*, Nieuw Arch. Wiskd. (5) **5** (2004), 284–291.

18 J. Korevaar, *Tauberian theory, a century of developments*, Grundl. math. Wiss. vol. 329, Springer, Berlin, 2004.

19 J. Korevaar, *Prime pairs and the zeta function*. J. Approx. Theory **158** (2009), 69–96.

20 J. Korevaar en H.J.J. te Riele, *Average prime-pair counting formula*. Math. Comp. **79** (2010), 1209–1229.

21 J.E. Littlewood, *Sur la distribution des nombres premiers*. C.R. Acad. Sci. Paris **158** (1914), 1869–1872.

22 H. Maier en C. Pomerance, *Unusually large gaps between consecutive primes*. Trans. Amer. Math. Soc. **322** (1990), 201–237.

23 H.L. Montgomery, *The pair correlation of zeros of the zeta function*, in: Analytic Number Theory (Proc. Symp. Pure Math., vol. 24), pp 181–193, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973.

24 T.R. Nicely, *New maximal prime gaps and first occurrences*. Math. Comp. **68** (1999), 1311–1315.

25 T.R. Nicely, *Enumeration of the twin-prime pairs to 10^{16}*. See the internet, http://www.trnicely.net, September 2008.

26 A. Odlyzko, M. Rubinstein en M. Wolf, *Jumping champions*. Experiment. Math. **8** (1999), 107–118.

27 G. Pólya, *Heuristic reasoning in the theory of numbers*. Amer. Math. Monthly **66** (1959), 375–384.

28 R.A. Rankin, *The difference between consecutive prime numbers*. J. London Math. Soc. **13** (1938), 242–247.

29 K. Soundararajan, *Small gaps between prime numbers: The work of Goldston–Pintz–Yildirim*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **44** (2007), 1–18.

30 Table of prime numbers $2 - 9999$. Internet.

31 Table of prime numbers $1 - 100000$. Internet.

32 Tenenbaum, G. en Mendès France, M., *The prime numbers and their distribution*. Student Math. Library vol. 6, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000. (Vertaling van de Franse editie uit 1997.)

33 Twin prime. Internet.

34 Jie Wu, *Chen's double sieve, Goldbach's conjecture and the twin prime problem*. Acta Arith. **114** (2004), 215–273.