Hertentamen algebra 2

1 februari 2006, 9.30–12.30, zaal G.103

Schrijf je naam en collegekaartnummer of het werk dat je inlevert.
Beargumenteer telkens je antwoord. Veel succes!

Opgave 1.
a. Ontbind de polynomen

$$2X^4 + 13X^3 - X^2 - 3X, \qquad X^4 + 3X^3 + 9X^2 - 6, \qquad X^7 - 8$$

in $\mathbb{Z}[X]$.
b. Ontbind bovenstaande polynomen in $\mathbb{F}_7[X]$.

Opgave 2. Laat R een commutatieve ring met 1 zijn.
a. Geef de definitie van een priemideaal I van R.
b. Bewijs: I is een priemideaal van $R \Leftrightarrow R/I$ is een domein.

Opgave 3. Beschouw de deelring $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}] = \{a + b\sqrt{-7} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ van $\mathbb{C}$, met bijbehorende norm $N(a + b\sqrt{-7}) = a^2 + 7b^2$.
a. Laat zien dat $-1 + \sqrt{-7}$ en $2 + \sqrt{-7}$ irreducibele elementen van $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ zijn.
b. Bewijs dat $(2 + \sqrt{-7})$ een maximaal ideaal van $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ is.
c. Laat zien dat $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]/(-1 + \sqrt{-7}) \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.
d. Is $(-1 + \sqrt{-7})$ een priemideaal van $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$? Motiveer je antwoord.
e. Construeer een maximaal ideaal J van $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ dat het ideaal $(-1 + \sqrt{-7})$ bevat.

Opgave 4.
a. Is $\mathbb{Q}[X]/(X^3 + 2X + 3)$ een lichaam? Motiveer je antwoord.
b. Toon aan dat $\mathbb{Q}[X]/(X^3 + 2X + 6)$ een lichaam is.
c. Laat $\alpha \in \mathbb{C}$ een nulpunt zijn van $X^3 + 2X + 6$. Construeer een polynoom $p \in \mathbb{Q}[X]$ zodat $p(\alpha)$ de inverse is van $\alpha + 1$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$.
d. Bewijs dat $\mathbb{Q}((\alpha + 1)^2) = \mathbb{Q}(\alpha)$.

Opgave 5. In deze opgave is m een willekeurig geheel getal.
a. Toon aan dat

$$R_m := \left\{ \begin{pmatrix} a & mb \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

een commutatieve deelring is van de ring $\mathrm{Mat}(2; \mathbb{Z})$ van 2×2-matrices met gehele coefficienten.
b. Toon aan dat R_{-1} isomorf is met de ring $\mathbb{Z}[i]$ van Gauss.
c. Bewijs: R_m heeft nuldelers $\Leftrightarrow m = n^2$ voor zekere $n \in \mathbb{Z}$ (hint: bekijk de determinant).