

Amorização da Matemática

com Maple

André Heck

Copyright © 2000, André Heck.

Universidade de Amsterdam  
Kruislaan 408  
1098 SM Amsterdam  
Holanda

e-mail: [heck@science.uva.nl](mailto:heck@science.uva.nl)

Todos os direitos reservados. A reprodução não-autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação do copyright. (Lei 5.988)

# Prefácio

Estamos diante de uma Revolução Educacional. Um horizonte desponta. Os softwares e a Internet estão a oferecer uma mudança qualitativa no ensino. A velha forma presencial de giz e quadro-negro deverá ser complementada por um ensino global, baseado em tecnologias.

Essa nova forma global-presencial modifica a Escola. A interação do aluno com a matéria não depende mais unicamente do professor; uma nova liberdade lhe é concedida: auto-interação por software e links na Web.

Portanto, necessitamos de um novo tipo de livro. Algo que reescreva o roteiro de uma determinada matéria com uma didática baseada em software e com comunicação via Internet. O surgimento dessa literatura é essencial para essa revolução acontecer.

Neste mundo globalizado, onde as relações mais profundas são baseadas num Capitalismo do Conhecimento, o Brasil tem que priorizar uma Educação ágil. Facilitar a que as pessoas participem da Era do Conhecimento. Por isto, tornou-se essencial ensinar Matemática dentro de uma modernidade tecnológica.

O livro do Prof. André Heck vem de encontro a esse momento. O seu objetivo está em fazer com que o aluno aprenda Matemática de uma outra maneira. Ao invés de incompreensível, ela pode ser alegremente entendida. Através de comandos, animações e variadas aplicações, cobre os tópicos necessários, servindo de referência para qualquer curso.

É um texto básico. Contém todos os assuntos necessários. Uma oportunidade de um aprendizado lúdico em todos os níveis de Matemática. O livro ensina a trabalhar em diversas áreas da Matemática com as novas características e benefícios do Maple. A sua utilidade serve os mundos acadêmico, indústria e negócios. Atualmente, desde bancos até escolas do 2º grau utilizam as suas aplicações.

“Assim como os carros encurtaram as distâncias geográficas, o software Maple diminui a distância entre uma idéia e o seu respectivo cálculo. Sem querer, Você acaba aprendendo...”

Dois aspectos são fundamentais através deste livro. São a possibilidade de uma nova produtividade no ensino de Matemática e o advento da Matemática Aplicada. Cada vez mais, os alunos desejam aprender com eficiência e serem capacitados a desafiar questões práticas.

A Matemática que aprendemos na Escola está pronta. Assim, aprendê-la não requer punições medievais. Precisamos apenas torná-la leve e acessível. Ensinar é amorizar, tornar o assunto um objeto de desejo igual a uma bola colorida nas mãos de uma criança.

Hummhhh! Talvez esse livro venha a amorizar a Matemática para Você... No final de um cálculo, a vida tem que ser bela!

Sorria, Matemática, porque nós gostamos de você.

R. Doria  
Doutor em Física, Oxford University  
Petrópolis, abril de 2000

# Nota do Autor

O livro tem como base o “best-seller” denominado “Introduction to Maple”. Contudo essa versão em português modifica e adiciona mais de 200 páginas. Além da introdução de um novo material, utilizamos a versão atual do Maple.

Hoje, a rápida evolução da Informática, obriga-nos a continuamente atualizarmos os nossos textos. Através do Maple 6, novas possibilidades aparecem. O Maple tornou-se um software maduro, no sentido de que num mesmo pacote são efetuadas operações algébricas e numéricas. Esta união conduz a uma grande facilidade para se trabalhar com Matemática Aplicada. Além disto, entre outros benefícios, estão a conectividade com o Excel 2000, pacotes numéricos da NAG, criação profissional de gráficos, interatividade virtual etc.

O livro aqui apresentado transcende a uma material de consulta ou até mesmo a um simples compêndio didático; na verdade, abre as portas para uma nova modalidade de ensino de ciências básicas, como diferentes ramos da Matemática, Física, Química, Biologia, Estatística, Engenharia, Economia.

O estilo é rápido e objetivo; as ilustrações são concretizadas com exemplos extremamente bem-direcionados e de caráter prático, colocando em evidência a necessidade da programação algébrica em problemas acadêmicos e na pesquisa.

O livro é fruto de árduo trabalho em pesquisa e cursos, e todo o “feedback” desta experiência está implícito no material aqui tratado, o que faz do mesmo uma eficiente fonte para o aprendizado da programação em Maple.

Evidentemente, as dificuldades para se escrever um livro em português são muitas para alguém que não conhece a língua. Foi um desafio enorme. Sem dúvida, nada teria acontecido se não houvesse o apoio constante dos colegas José Helayël-Neto e Renato Doria. Agradeço também, a Carlos Carneiro e Renato Portugal por suas sugestões e ao Prof. Geraldo Werneck pelas inúmeras correções do texto. Muitas outras pessoas contribuíram a esse livro. Entre outras, as minhas meninas: Berlinda, Gabriela e Vanessa por digitarem parte deste manuscrito.

Finalmente, gostaria de agradecer ao Prof. Marco Raupp por oferecer as facilidades do LNCC (Laboratório Nacional de Computação Científica) para que esse livro fosse concluído.

Nós, holandeses, gostamos do Brasil. Desde o Príncipe Maurício de Nassau, estamos em contato com esse belo país. Atualmente, uma nau é um livro !

Espero que gostem. Até mais,

André Heck.  
Universidade de Amsterdam  
Petrópolis, março de 2000

# Conteúdo

<b>Prefácio</b>	<b>i</b>
<b>Nota do Autor</b>	<b>iii</b>
<b>Lista das Tabelas</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução à Computação Algébrica</b>	<b>1</b>
1.1 O que é a Computação Algébrica? . . . . .	1
1.2 Sistemas de Computação Algébrica . . . . .	2
1.3 Características de Sistemas de Computação Algébrica . . . . .	5
1.4 Vantagens da Computação Algébrica . . . . .	11
1.5 Limitações da Computação Algébrica . . . . .	24
1.6 A Arquitetura do Maple . . . . .	30
<b>2 Os Primeiros Passos: Cálculos com Números</b>	<b>37</b>
2.1 Iniciando . . . . .	37
2.2 Utilizando o Sistema de Ajuda . . . . .	40
2.3 Números Inteiros e Racionais . . . . .	46
2.4 Números Irracionais e Números Decimais . . . . .	50
2.5 Números Algébricos . . . . .	57
2.6 Números Complexos . . . . .	62
2.7 Exercícios . . . . .	67
<b>3 Variáveis e Nomes</b>	<b>69</b>
3.1 Atribuição e Retirando a Atribuição . . . . .	69

3.2	Avaliação . . . . .	77
3.3	Nomes de Variáveis . . . . .	81
3.4	Tipos de Dados Básicos . . . . .	87
3.5	Atributos . . . . .	93
3.6	Propriedades . . . . .	94
3.7	Exercícios . . . . .	98
<b>4</b>	<b>Se Acostumando com o Maple</b>	<b>101</b>
4.1	Entrada e Saída no Maple . . . . .	101
4.2	A Biblioteca do Maple . . . . .	107
4.3	Lendo e Gravando em Arquivos . . . . .	111
4.4	Importando e Exportando Dados Numéricos . . . . .	117
4.5	E/S de Baixo Nível . . . . .	120
4.6	Gerando Código . . . . .	132
4.7	Modificando o Maple a Seu Gosto . . . . .	139
4.8	Exercícios . . . . .	144
<b>5</b>	<b>Funções Polinomiais e Racionais</b>	<b>147</b>
5.1	Polinômios Univariáveis . . . . .	147
5.2	Polinômios Multivariáveis . . . . .	152
5.3	Funções Racionais . . . . .	154
5.4	Conversões . . . . .	156
5.5	Exercícios . . . . .	159
<b>6</b>	<b>Representação Interna de Dados e Substituição</b>	<b>161</b>
6.1	Representação Interna de Polinômios . . . . .	161
6.2	Expressões Racionais Generalizadas . . . . .	167
6.3	Substituição . . . . .	170
6.4	Exercícios . . . . .	183
<b>7</b>	<b>Manipulação com Polinômios e Expressões Racionais</b>	<b>185</b>
7.1	Expansão . . . . .	185
7.2	Fatoração . . . . .	188
7.3	Forma Canônica e Forma Normal . . . . .	191
7.4	Normalização . . . . .	193
7.5	Agrupamento . . . . .	196
7.6	Ordenamento . . . . .	198
7.7	Exercícios . . . . .	198
<b>8</b>	<b>Funções</b>	<b>201</b>
8.1	Funções Matemáticas . . . . .	201
8.2	Operadores-Seta . . . . .	205
8.3	Funções Definidas por Partes . . . . .	208
8.4	Procedimentos do Maple . . . . .	214
8.5	Definição Recursiva de um Procedimento . . . . .	217

8.6	<b>unapply</b>	222
8.7	Operações em Funções	223
8.8	Funções Anônimas	224
8.9	Exercícios	225
<b>9</b>	<b>Diferenciação</b>	<b>227</b>
9.1	Diferenciação Simbólica	227
9.2	Diferenciação Automática	235
9.3	Exercícios	239
<b>10</b>	<b>Integração e Somatório</b>	<b>241</b>
10.1	Integração Indefinida	241
10.2	Integração Definida	251
10.3	Integração Numérica	256
10.4	Transformadas Integrais	257
10.5	Ajudando o Maple em Casos Especiais de Integração	268
10.6	Somatórios	272
10.7	Exercícios	277
<b>11</b>	<b>Séries, Aproximações e Limites</b>	<b>283</b>
11.1	Séries Truncadas	283
11.2	Aproximações de Funções	294
11.3	Séries de Potências	302
11.4	Limites	304
11.5	Exercícios	307
<b>12</b>	<b>Estruturas de Dados Compostas</b>	<b>309</b>
12.1	Seqüência	309
12.2	Conjunto	312
12.3	Lista	314
12.4	Array	320
12.5	Tabela	327
12.6	Avaliação até o Último Nome	331
12.7	Chamada de Função	334
12.8	Conversão entre Estruturas de Dados Compostas	336
12.9	Exercícios	339
<b>13</b>	<b>O Procedimento assume</b>	<b>341</b>
13.1	A Necessidade do <b>assume</b>	341
13.2	O Básico do Procedimento <b>assume</b>	345
13.3	Uma Álgebra de Propriedades	349
13.4	A Implementação do <b>assume</b>	351
13.5	Exercícios	356
13.6	As Hierarquias das Propriedades	357

<b>14</b>	<b>Simplificação</b>	<b>361</b>
14.1	Simplificação Automática . . . . .	362
14.2	<b>expand</b> . . . . .	364
14.3	<b>combine</b> . . . . .	372
14.4	<b>simplify</b> . . . . .	378
14.5	<b>convert</b> . . . . .	384
14.6	Simplificação Trigonométrica . . . . .	388
14.7	Simplificação com respeito a Vínculos . . . . .	391
14.8	Controle sobre a Simplificação . . . . .	395
14.9	Definindo suas Próprias Rotinas de Simplificação . . . . .	400
14.10	Exercícios . . . . .	404
14.11	Tabela de Simplificação . . . . .	407
<b>15</b>	<b>Gráficos</b>	<b>409</b>
15.1	Gráficos Bidimensionais Básicos . . . . .	411
15.2	Opções do <b>plot</b> . . . . .	416
15.3	A Estrutura dos Gráficos Bidimensionais . . . . .	429
15.4	O Pacote <b>plottools</b> . . . . .	434
15.5	Gráficos Bidimensionais Especiais . . . . .	438
15.6	Geometria Bidimensional . . . . .	452
15.7	Problemas com Número Insuficiente de Pontos de Amostragem	455
15.8	Um Erro Comum . . . . .	456
15.9	Alguns Gráficos Tridimensionais Básicos . . . . .	458
15.10	Opções do <b>plot3d</b> . . . . .	459
15.11	A Estrutura dos Gráficos Tridimensionais . . . . .	467
15.12	Gráficos Tridimensionais Especiais . . . . .	472
15.13	Gráficos de Dados . . . . .	480
15.14	Animação . . . . .	490
15.15	A Lista das Opções Gráficas . . . . .	492
15.16	Exercícios . . . . .	498
<b>16</b>	<b>Resolvendo Equações</b>	<b>503</b>
16.1	Equações em uma Incógnita . . . . .	503
16.2	Abreviações no <b>solve</b> . . . . .	504
16.3	Algumas Dificuldades . . . . .	505
16.4	Sistemas de Equações . . . . .	512
16.5	O Método da Base de Gröbner . . . . .	523
16.6	Desigualdades . . . . .	530
16.7	Resolvendo Numericamente . . . . .	532
16.8	Outros Métodos para Resolver Equações . . . . .	534
16.9	Exercícios . . . . .	541
<b>17</b>	<b>Equações Diferenciais</b>	<b>545</b>
17.1	Primeira Olhada em EDOs . . . . .	546
17.2	Soluções Analíticas . . . . .	547

17.3	Simetrias de Lie Puntuais para EDOs . . . . .	563
17.4	Método da Série de Taylor . . . . .	586
17.5	Método da Série de Potências . . . . .	587
17.6	Soluções Numéricas . . . . .	590
17.7	Métodos Gráficos . . . . .	604
17.8	Transformação de Coordenadas . . . . .	610
17.9	Métodos de Perturbação . . . . .	615
17.10	Equações Diferenciais Parciais . . . . .	627
17.11	Simetrias de Lie Puntuais das EDPs . . . . .	639
17.12	Exercícios . . . . .	642
<b>18</b>	<b>Álgebra Linear: O Pacote linalg</b>	<b>645</b>
18.1	Carregando o Pacote linalg . . . . .	645
18.2	Criando Novos Vetores e Matrizes . . . . .	647
18.3	Aritmética Vetorial e Matricial . . . . .	650
18.4	Funções Matriciais Básicas . . . . .	655
18.5	Operações Estruturais . . . . .	659
18.6	Operações Vetoriais . . . . .	662
18.7	Formas Básicas de Matrizes . . . . .	663
18.8	Exercícios . . . . .	668
<b>19</b>	<b>Álgebra Linear: Aplicações</b>	<b>671</b>
19.1	Cinemática do Manipulador Stanford . . . . .	671
19.2	Um Modelo com 3 Compartimentos para Transferência de Cádmio . . . . .	676
19.3	Teoria do Orbital Molecular de Hückel . . . . .	688
19.4	Análise Vetorial . . . . .	694
19.5	A inversa de Moore-Penrose . . . . .	702
19.6	Exercícios . . . . .	703
	<b>Bibliografia</b>	<b>707</b>
	<b>Índice</b>	<b>719</b>



# Lista das Tabelas

1.1	Componentes do Maple. . . . .	33
2.1	O sistema de ajuda do Maple. . . . .	45
2.2	Constantes matemáticas no Maple. . . . .	52
2.3	Funções matemáticas geralmente usadas. . . . .	54
2.4	Selecionadores em <b>RootOf</b> . . . . .	62
3.1	Funções auxiliares para uso de nomes. . . . .	73
3.2	Avaliação para atribuição e retirada da atribuição. . . . .	76
3.3	Palavras reservadas no Maple. . . . .	82
3.4	Apóstrofos, aspas e símbolos de porcentagem. . . . .	87
3.5	Tipos de dados superficiais mais usados. . . . .	89
3.6	Testando o tipo. . . . .	91
3.7	Combinação de ponto, ponto e vírgula e sinal de igualdade. . . . .	91
4.1	A ferramenta <b>userinfo</b> . . . . .	105
4.2	Subpacotes do pacote <b>stats</b> . . . . .	109
4.3	Lendo e gravando em arquivos no Maple. . . . .	117
4.4	Streams no Maple: abrindo e fechando. . . . .	121
4.5	E/S procedimentos formatados de baixo nível. . . . .	124
4.6	Rótulos no procedimento <b>printf</b> . . . . .	125
4.7	Códigos de conversão no procedimento <b>printf</b> . . . . .	125
4.8	Códigos de caracteres de saída. . . . .	126
4.9	Códigos de conversões no procedimento <b>sscanf</b> . . . . .	128

4.10 Opções do procedimento **fortran**. . . . . 136

4.11 Opções do procedimento **C**. . . . . 137

4.12 Valores de **errorbreak**. . . . . 143

10.1 Algumas integrais elípticas no Maple. . . . . 255

10.2 Transformadas integrais no Maple. . . . . 258

12.1 Seleção em seqüência, conjunto, ou lista. . . . . 320

12.2 Formato da chamada de uma função de indexação. . . . . 324

12.3 Principais conversões de tipos de dados compostos de  $S$  para  $T$ . 339

13.1 Procedimentos para fazer suposições. . . . . 345

15.1 Funções no pacote **plottools** para alterar objetos gráficos. . 436

15.2 Procedimentos para fazer gráficos de listas. . . . . 480

15.3 Consumo de bebidas na Holanda por habitante. . . . . 481

15.4 Comandos gráficos estatísticos no subpacote **statplots**. . . . 487

16.1 Opções de **fsolve**. . . . . 532

17.1 Algumas EDOs solúveis de primeira ordem. . . . . 557

17.2 Algumas EDOs solúveis de segunda ordem. . . . . 558

17.3 Opções de **dsolve(EDO, type=exact)**. . . . . 563

17.4 A classificação de Lie das EDOs de segunda ordem que admitem uma álgebra de simetria bidimensional. . . . . 584

17.5 Principais comandos no pacote **DEtools** para o método da simetria de Lie. . . . . 585

17.6 Métodos numéricos fornecidos por **dsolve**. . . . . 601

17.7 Simetrias de Lie pontuais da equação de Korteweg-de Vries. . 642

18.1 Procedimentos relacionados a vetores e matrizes especiais. . . 648

18.2 Procedimentos básicos no pacote **linalg**. . . . . 659

18.3 Operadores matriciais. . . . . 660

18.4 Funções de verificação de propriedades de matrizes . . . . . 660

18.5 Operadores vetoriais. . . . . 663

18.6 Funções para transformações de matrizes em formas básicas. . 664

19.1 Coordenadas curvilíneas ortogonais em 2 dimensões. . . . . 695

19.2 Coordenadas curvilíneas ortogonais em 3 dimensões. . . . . 696