

## Gewichtige wiskunde in de klas

André Heck

AMSTEL Instituut, Universiteit van Amsterdam

e-mail: heck@science.uva.nl

### 1. INLEIDING

Het tv-programma “Big Diet” behandelt het thema zwaarlijvigheid en nog meer de vraag hoe je er vanaf kunt komen. Ook menig scholier vraagt zich wel eens af “Ben ik te dik of te dun?”. Andere veelgestelde vragen zijn: “Ben ik lang of kort in vergelijking met leeftijdgenoten?”, “Waarom zijn meisjes in de brugklas gemiddeld genomen langer dan jongens?” en “Hoe lang zal ik vermoedelijk worden?”. Deze vragen veronderstellen dat er zoiets bestaat als een normaal gewicht, een normale lengte en een normale groei en ontwikkeling van het menselijk lichaam. Ook andere begrippen zoals Quételet-index en botleeftijd blijken nuttig te zijn in studies van lichaamsgroei. Om vragen als “Wat is normaal?”, “Wat is het verband tussen botleeftijd en kalenderleeftijd?” en “Neemt zwaarlijvigheid in de westerse samenleving toe?” te kunnen beantwoorden heb je gegevens nodig.

Gegevens over gewichtstoename en lengtegroei van jongens en meisjes zijn in schoolboeken meestal verzonnen. Ze dienen alleen maar als omlijsting van veranderingsbegrippen zoals toenamendiagram, differentiequotiënt en helling, en als ‘ideale’ illustratie van statistische begrippen als normale verdeling, gemiddelde, mediaan en percentiel. We doen een kleine greep uit Nederlandse schoolboeken. Wat te denken van een opgave<sup>1</sup> waarin een 15-jarige jongen van 175 cm klein van stuk genoemd wordt, terwijl dit volgens de jongste Nederlandse groeicijfers boven het landelijke gemiddelde ligt? Hoe realistisch is een opgave<sup>2</sup> waarin een 12-jarige jongen 115 cm lang is, in zijn 17<sup>e</sup> levensjaar 27 cm langer wordt en tenslotte een eindlengte bereikt van 191 cm? Oordeel zelf op basis van figuur 1, waarin de lengtegroei van deze jongen grafisch weergegeven is samen met de groeikromme van de gemiddelde Nederlandse jongen volgens de meest recente landelijke groeistudie. Dezelfde vraagtekens kun je zetten bij een opgave<sup>3</sup> waarin de groeisnelheid van een jongen tussen 2 en 11 jaar constant is of een praktische opdracht<sup>4</sup> waarin verondersteld wordt dat van een groep personen het gewicht normaal verdeeld is

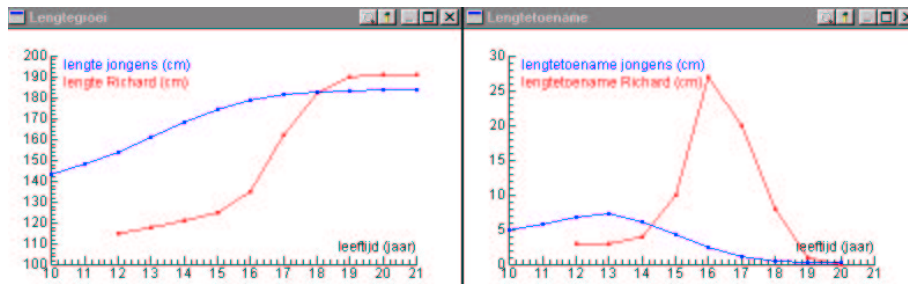
Het veel gehoorde argument dat echte gegevens te weerbarstig zijn om succesvol mee te kunnen werken gaat kennelijk niet meer op in een praktische opdracht om de lengtegroei van jongens en meisjes te onderzoeken. Deze opdracht

<sup>1</sup> Moderne Wiskunde, havo bovenbouw B1, deel 2, 1998. Hoofdstuk A3, opdracht I-4.

<sup>2</sup> Netwerk VWO bovenbouw A1B1, deel 1, 1998. Hoofdstuk 9, opgave 3.

<sup>3</sup> Getal & Ruimte, VWO 2, 1998. Algemene herhaling, opdracht 48.

<sup>4</sup> Getal & Ruimte, VWO EM3, 1999. Normale verdeling, praktische opdracht 2.



FIGUUR 1. Fictieve en echte groeikrommen.

staat ook letterlijk in hedendaagse tekstboeken. Verwachten de opstellers van zo'n opdracht dat leerlingen dan ineens wel met weerbarstigheid van echte data overweg kunnen? Of gaan ze op voorhand uit van weinig wiskundige diepgang bij onderzoek door leerlingen? Dit laatste is amper voor te stellen.

Echte groeigegevens van Nederlandse jongens en meisjes zijn beschikbaar en deze zijn net zo goed, zo niet beter te gebruiken in de klas. De gegevens uit de meest recente landelijke groeistudie worden sinds 2000 uitvoerig in krantenartikelen<sup>5</sup> en in wetenschappelijke tijdschriften<sup>6</sup> besproken. André Holleman, wiskundedocent op het Bonhoeffer college te Castricum en deeltijds 'leraar in onderzoek' op het AMSTEL Instituut, en de auteur hebben deze bronnen en de recente groeigegevens gebruikt bij het ontwikkelen van praktische opdrachten over lichaamsgroei voor 4/5 VWO leerlingen. 4 VWO A leerlingen hebben met dit lesmateriaal zelf verbanden tussen gewicht, lengte, leeftijd en andere biomeetrische gegevens onderzocht. In dit artikel zullen we het lesmateriaal en enkele resultaten en ervaringen van leerlingen bespreken. Een keuzeopdracht voor de leerlingen is voor het onderdeel 'Praktische oefeningen' in de vakantiecursus als apart hoofdstuk in deze bundel opgenomen. Maar we beginnen eerst met een overzicht van enkele belangrijke zaken over lichaamsgroei, zoals we die in recente onderzoeksliteratuur gevonden hebben.

## 2. NORMALE GROEI EN ONTWIKKELING

Lichaamsgroei en ontwikkeling van de mens kunnen op vele manieren onderzocht worden. Hele dikke handboeken<sup>7</sup> en talloze onderzoeksartikelen worden over dit ontwerp geschreven. In dit artikel kunnen we dus bij lange na geen volledig overzicht over lichaamsgroei geven. We beperken ons tot enkele thema's, die bijna allemaal met groeidiagrammen te maken hebben, en we doen dit in

<sup>5</sup> Het krantenartikel 'Hoe langer hoe dikker' van Wim Köhler over de landelijke groeistudie uit 1997, dat op 4 juli 2000 in NRC Handelsblad verschenen is en elektronisch beschikbaar is op webadres [www.nrc.nl/W2/Nieuws/2000/03/04/Vp/wo.html](http://www.nrc.nl/W2/Nieuws/2000/03/04/Vp/wo.html), is in het lesmateriaal gebruikt.

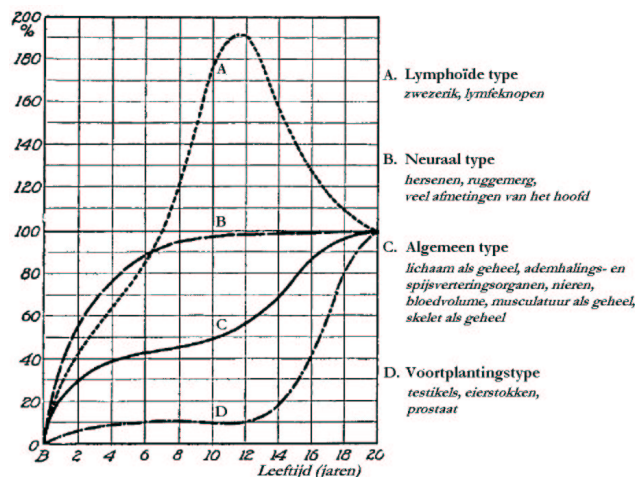
<sup>6</sup> Zie het themanummer 27, jaargang 145 (dd. 7 juli 2001) van het Nederlands Tijdschrift voor Geneeskunde.

<sup>7</sup> Het standaardwerk *Human Growth - A Comprehensive Treatise*, onder redactie van groeideskundigen F. Falkner en J.M. Tanner (2<sup>e</sup> druk, Plenum Press, New York, 1986) bestaat uit drie dikke delen van elk honderden pagina's.

de vorm van veelgestelde vragen en korte antwoorden hierop. Aan het einde van dit artikel geven we een lijst van de belangrijkste bronnen die we hiervoor geraadpleegd hebben.

*2.1. Wat verstaan we precies onder lichaamsgroei en welke maten gebruiken we hiervoor?*

De hele tweede sectie van het artikel gaat over over groei en ontwikkeling. Wat bedoelen we precies met deze woorden? De eerste definitie van het woord 'groei' in van Dale's Groot Woordenboek Hedendaags Nederlands is: het groeien, het toenemen in grootte van levende wezens of hun organen. Het trefwoord 'ontwikkeling' is behalve 'het ontwikkelen  $\implies$  groei, wasdom' ook 'het zich-ontwikkelen  $\implies$  ontplooiing'. Bij ontwikkeling gaat het dus niet alleen om toename van gewicht of lengte, maar om een hele serie gebeurtenissen en veranderingen tijdens het proces van volwassen worden. Het omvat ook psychologische zaken en vaardigheden; denk aan persoonlijkheidsontwikkeling, zintuiglijke en motorische ontwikkeling. Bij groei daarentegen ligt de nadruk meer op de anatomische en fysiologische veranderingen. Uit de woordenboek-definitie van groei blijkt ook dat het dan zowel veranderingen in het lichaam als geheel betreft als veranderingen van lichaamsdelen zoals individuele organen afzonderlijk. Dit onderscheid tussen lichaam als geheel en de lichaamsdelen apart is relevant omdat niet alle delen even hard groeien en dat tegelijkertijd doen; zie bijvoorbeeld onderstaande figuur<sup>8</sup>, waarin de groeikrommen van verschillende onderdelen van het lichaam te zien zijn.



FIGUUR 2. Vier belangrijke typen van postnatale groeikrommen uitgedrukt in het percentage van totale groeitoename, d.w.z.  $\frac{\text{gewicht op gegeven leeftijd} - \text{geboortegewicht}}{\text{gewicht op volwassen leeftijd} - \text{geboortegewicht}} \times 100\%$ .

Als we nu enkel kijken naar de toename in grootte van een levend wezen zoals de mens, hoe leggen we deze toename dan vast? Dit kan op verschillende

<sup>8</sup> Ontleend aan R.E. Scammon, *The measurement of the body in childhood*. In *The Measurement of Man*, Harris et al (eds.), University of Minneapolis Press, 1930, pp. 173–215.

manieren. Het lichaamsgewicht is een algemene parameter van groei, maar geeft verder geen informatie over de vorm van het lichaam. Lichaamslengte is de meest gangbare maat voor groei. Daarnaast wordt vaak de omvang van verschillende delen van het lichaam gemeten, zoals van het hoofd, de borst, de armen en benen. I.v.m. afmetingen van meubilair, gereedschappen, werkruimtes, gebruiksvoorwerpen, kleding, e.d. bestaat er interesse in talloze andere lichaamsmaten<sup>9</sup> zoals zithoogte, spanwijdte, reikhoogte, hoofdbreedte, handlengte, vingerdikte, en zo kunnen we nog wel een tijdje doorgaan.

Het meten van de dikte van huidplooien geeft een indruk van de hoeveelheid onderhuids vetweefsel en daarmee van de totale verhouding vet:vetvrij weefsel in het lichaam. Volgens Durham en Rahaman<sup>10</sup> bestaat er het volgende verband tussen soortelijk gewicht  $\rho$  (in  $\text{g/cm}^3$ ) en de som SHD van vier huidplooidikten (in mm) voor jongens en meisjes:

$$\rho_{\text{jongens}} = 1,1533 - 0,0643 \times {}^{10}\log \text{SHD}, \quad \rho_{\text{meisjes}} = 1,1369 - 0,0598 \times {}^{10}\log \text{SHD}$$

Met Siri's formule krijg je: vetpercentage =  $4,95/\rho - 4,50$ .

Bij kinderen met groeistoornissen wordt gewoonlijk ook de botrijping bepaald aan de hand van een röntgenfoto van linkerhand en pols. Dit geeft een betere indruk van het stadium van lichamelijke ontwikkeling waarin een kind zich bevindt. Een andere maat hiervoor is de tandontwikkeling: de tweede permanente kies staat in Engeland ook wel bekend als de 'factory tooth', omdat het verschijnen van deze tand ooit bij wet betekende dat een kind in een fabriek kon gaan werken. Een derde aanwijzing voor de nog te verwachten lengtegroei is het puberteitsstadium waarin men zich bevindt.

## 2.2. Welke factoren spelen een rol bij lichaamsgroei?

De kennis over hoe een bevruchte eicel uitgroeit tot een volwassen individu met pakweg  $10^{14}$  cellen is nog maar beperkt. Wel is inmiddels duidelijk dat de volgende factoren een rol spelen.

*Erfelijke factoren.* Lange ouders hebben meestal lange kinderen en korte ouders hebben vaak korte kinderen.

*Etnische verschillen.* De Masai uit Centraal-Afrika zijn groot zodat hun lichaam een groot huidoppervlak heeft om door transpiratie gemakkelijk warmte te verliezen. Zij wonen niet heel ver weg van pygmeeën in het vochtige regenwoud die juist door een kleine lichaamsgrootte het temperatuurverlies via warmteuitstraling en warmtegeleiding maximaliseren. Bij indianenstammen in het Amazonegebied tref je eenzelfde aanpassing aan de leefomstandigheden aan. Een ander voorbeeld van etniciteit is het gegeven

<sup>9</sup> Op de website [www.nedscan.nl](http://www.nedscan.nl) staat een lange lijst van lichaamsmaten die veelal via een lichaamsscanner opgemeten worden. Voor wie meer wil weten over het belang van kennis over lichaamsafmetingen t.b.v. een betere afstemming van producten op mensen verwijzen we naar het artikel van J. Molenbroek, "Maatwerk voor de massa" in *Natuur en Techniek*, 1998, 66(7): 74-85.

<sup>10</sup> Zie de website [www.medal.org](http://www.medal.org) van het Medical Algorithms Project

dat de puberteitsspurten bij Aziatische kinderen gemiddeld wat vroeger valt dan bij Europese kinderen en dat ze daarom eerder zijn uitgegroeid dan kinderen van Europese afkomst. Aziatische kinderen en volwassenen zijn kleiner dan Europese leeftijdgenoten.

*Voeding, ziekte en omgeving.* Armoede, ondervoeding, eenzijdige voeding, maar ook langdurige ziekte of geografische hoogte beïnvloedt de groei van kinderen. Anorexia patiënten hongeren zichzelf uit en balletdanseressen en turnsters volgen een streng dieet en straffe trainingschema's. Ze doen dit soms dusdanig dat hun eerste menstruatie, ook wel menarche genoemd, een paar jaar vertraagd is. Kinderen groeien op grote hoogte langzamer en zijn kleiner dan kinderen op lage hoogte. Het lagere zuurstofniveau in het bloed zou hiervan de voornaamste oorzaak zijn.

*Chromosomale afwijkingen.* Primaire groeistoornissen zijn het gevolg van een defect van het bot- of steunweefsel. Het syndroom van Turner is zo'n groeistoornis, die alleen bij meisjes en vrouwen voorkomt en die berust op het geheel of gedeeltelijk ontbreken van een X-chromosoom of op een structuurafwijking van een X-chromosoom. Een van de kenmerken van dit syndroom is dat meisjes geen puberteitsspurten doormaken. Het syndroom van Down wordt ook veroorzaakt door een afwijkend aantal chromosomen: er is een extra chromosoom 21. Dwerggroei (achondroplasie) is een voorbeeld van gestoorde groei van kraakbeen en bot, die een kleine lengte (door korte ledematen) tot gevolg heeft en die veroorzaakt wordt door een mutatie in het gen van de fibroblasten-groefactorreceptor 3 op het chromosoom 4.

*Hormonale controle.* Hormonen bepalen de groeisnelheid en de periode waarin de groei plaatsvindt. Verschillende secundaire groeistoornissen kunnen hierdoor verklaard worden. Groeihormoondeficiëntie kan aangeboren zijn of optreden als gevolg van (de behandeling van) tumoren, schedeltrauma of een infectie van het centrale zenuwstelsel. Het Rieger-syndroom en het Pallister-Hall-syndroom berusten bijvoorbeeld op een aangeboren groeihormoondeficiëntie. Een bijzondere vorm van dwerggroei is Laron-type dwerggroei, waarbij er sprake is van een genetische ongevoeligheid voor de effecten van het menselijke groeihormoon (GH, ook wel somatotropine genoemd). Tegenover dwerggroei staat reuzengroei, die veroorzaakt kan worden door overmatige GH-productie tijdens de jeugd. In dit geval zijn er, behalve een grote lengte, vaak geen andere opvallende uiterlijke kenmerken. Bij meisjes die een extreem grote lengte dreigen te bereiken wordt wel hormonale behandeling toegepast om het intreden van de puberteit te vervroegen en zo de lengtegroei eerder tot stilstand te brengen. Anders is dat bijvoorbeeld bij het syndroom van Marfan<sup>11</sup> dat berust op een afwijking in het bindweefsel, veroorzaakt door een genmutatie. Armen en benen zijn dan naar verhouding lang, de borstkas heeft een afwijkende vorm en gewrichten zijn overbeweeglijk.

<sup>11</sup> Voor informatie over het syndroom van Marfan verwijzen we naar de website [www.marfan.nl](http://www.marfan.nl).

### 2.3. Welke fasen in groei onderscheiden we?

In het algemeen maakt men bij lichaamsgroei onderscheid tussen de volgende vier fasen.

*Embryonale en foetale fase.* In de embryonale fase spreekt men van stamcellen die een nog ongedefinieerde celfunctie hebben en is het hele proces gericht op groei.

*Postnatale fase tot volwassenheid.* In deze fase is er meer sprake van een balans tussen celgroei en differentiatie van celfunctie.

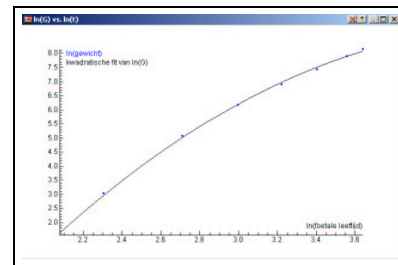
*Periode van volwassenheid.* Tijdens volwassenheid staat het behoud van de functionele activiteit van de cellen centraal. Voorbeeld zijn de vernieuwing van huid en het herstel bij botbreuken.

*Ouderdomsfase.* Nu is de groei minder toereikend voor evenwichtbehoud, met als gevolg verlies van cellen en functionaliteit. De huid wordt bijvoorbeeld dunner op oudere leeftijd en herstel van wonden duurt langer.

Hoewel we ons in dit artikel beperken tot de groeifase van zuigeling tot vroeg-volwassene, zijn de andere periodes niet minder interessant. Het meest spectaculair is eigenlijk de prenatale periode. Echografie wordt tegenwoordig veel toegepast bij zwangere vrouwen, o.a. ter controle van lichaamsafwijkingen van het ongeboren kind, maar deze onderzoeksmethode is ook voor biometrische doelen ingezet. Dergelijke research en post-mortem onderzoek heeft diverse groeigegevens van ongeboren kinderen opgeleverd. Met deze cijfers is totale groei en de ontwikkeling van allerlei organen in de foetus wiskundig gemodelleerd. We geven twee voorbeelden.<sup>12</sup> De referentiewaarden voor het totale gewicht van de foetus en het gewicht van hart en longen zijn in de onderstaande tabel gegeven.

<i>Foetale leeftijd (wk)</i>	8	10	15	20	25	30	35	38
<i>Lichaamsgewicht (g)</i>	4,7	21	160	480	990	1700	2700	3500
<i>Gewicht hart (g)</i>	0,044	0,18	1,3	3,6	7,1	12	18	24
<i>Gewicht longen (g)</i>	0,091	0,60	5,5	14	25	36	48	597

Een van de populaire regressiemodellen voor groei is om de logaritme van foetaal gewicht uit te zetten tegen de logaritme van de foetale leeftijd. In nevenstaande figuur is goed te zien dat een kwadratisch verband tussen deze afgeleide grootheden een goede kandidaat is. De regressieformule voor het foetale gewicht  $G$  luidt:  $G = \exp(-5,986 + 4,817 \ln(t) - 0,255 \ln^2(t))$ .



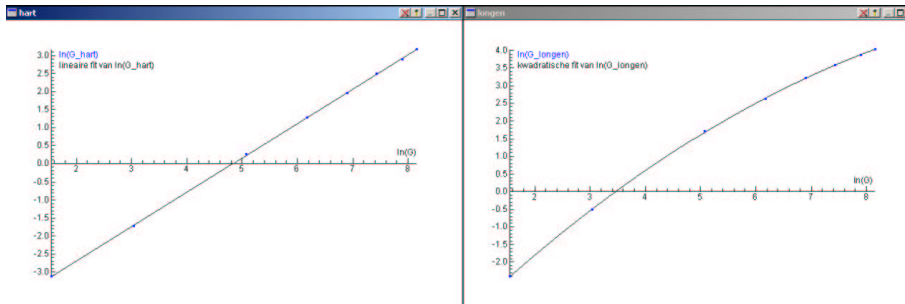
FIGUUR 3:  $\ln(G)$  vs  $\ln(t)$ .

<sup>12</sup> Afkomstig uit het ontwerp-rapport “Basic Anatomical and Physiological Data for Use in Radiological Protection: Reference Values” van de ICRP Task Group (elektronisch beschikbaar via [www.icrp.org/draft\\_anatomical.htm](http://www.icrp.org/draft_anatomical.htm))

De volgende allometrische formules<sup>13</sup> zijn met bovenstaande gegevens bepaald:

$$G_{\text{hart}} = 0,01012 G^{0,9489} \quad \text{en} \quad G_{\text{longen}} = 0,009351 G^{1,552-0,05945 \ln(G)},$$

waarbij  $G$  steeds het totale gewicht van de foetus voorstelt. De eerste formule betekent dat er een lineair verband tussen  $\ln(G_{\text{hart}})$  en  $\ln(G)$  bestaat; de laatste formule betekent dat er een kwadratisch verband tussen  $\ln(G_{\text{longen}})$  en  $\ln(G)$  bestaat. In figuur 4 zijn de data met bijpassende regressiekrommen goed in beeld gebracht.



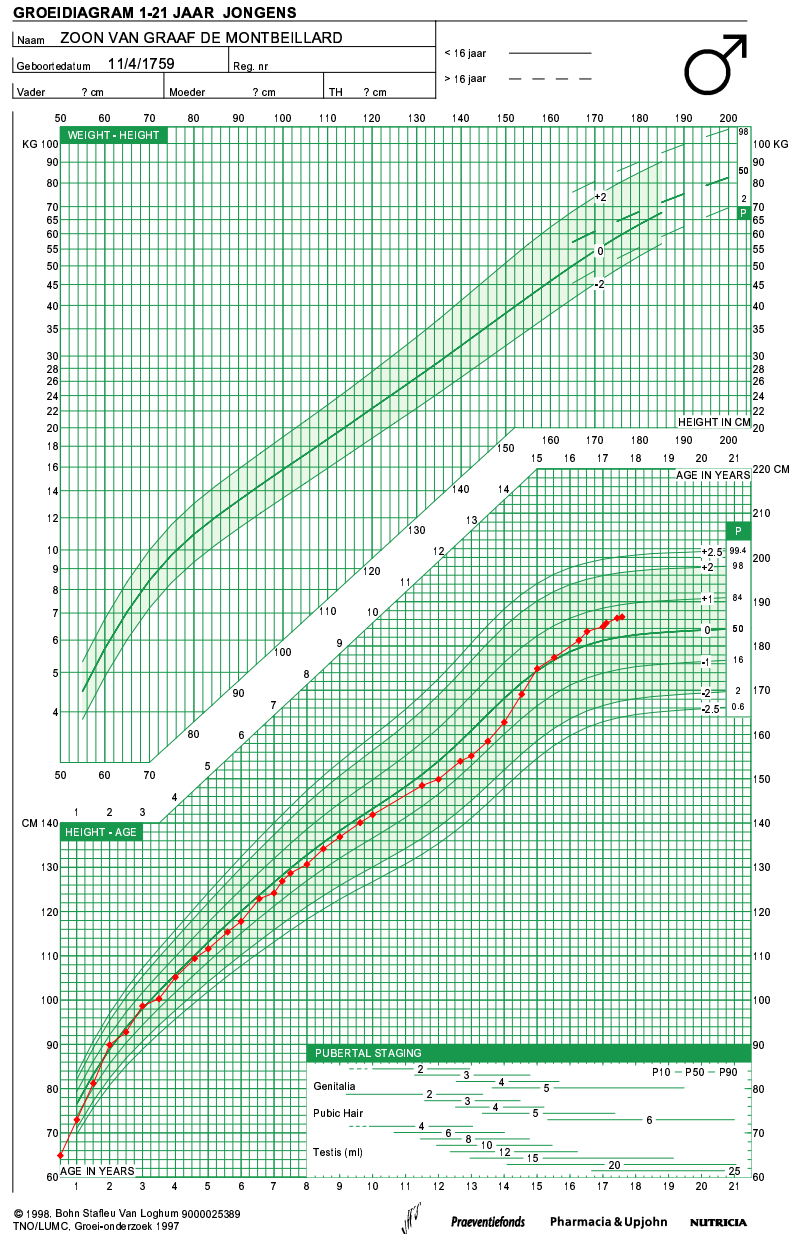
FIGUUR 4. Verbanden tussen het gewicht van het hart, van de longen en van het hele lichaam van een foetus.

#### 2.4. Hoe geven we groei grafisch weer?

Groei in kwantitatieve zin wordt bepaald door de periode waarin de groei plaats vindt en door de groeisnelheid, d.w.z. de toename per tijdseenheid. Metingen bij een individu op geregelde tijdstippen kunnen in een diagram uitgezet worden. Zo krijg je een lengte-naar-leeftijd diagram, gewicht-naar-leeftijd diagram, hoofdometrek-naar-leeftijd diagram, etc. Deze krommen vlakken af naar een maximale waarde die bereikt wordt wanneer de groei stopt.

Ook wordt gebruik gemaakt van toenamendiagrammen: lengtegroeisnelheid versus leeftijd is zo'n diagram. In dergelijke diagrammen komt de variatie in groeisnelheid goed in beeld. Een dergelijke kromme gaat voor hogere leeftijd richting 0 als de groei afneemt of stopt. Als de kromme op één individu betrekking heeft spreken we van een longitudinale groeikromme. De oudste bekende longitudinale groeikromme is afkomstig van graaf Philibert Gueneau de Montbeillard (1720–1785), die de lengte van zijn zoon met tussenpozen van pakweg een half jaar vanaf diens geboorte op 11 april 1759 tot de leeftijd van zeventien en een half jaar opgemeten heeft. De lengte-naar-leeftijd kromme hebben we in figuur 5 ingetekend in het Nederlandse groeidiagram voor jongens dat momenteel in de eerste lijn van de gezondheidszorg en in de kindergeneeskunde gebruikt wordt.

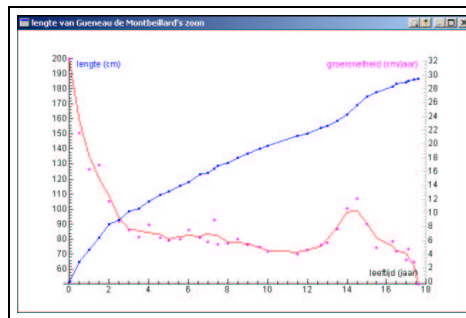
<sup>13</sup> R.H. Luecke et al, Mathematical representation of organ growth in the human embryo/fetus. *Int. J. Bio-Med. Comput.* (1995) 39:337-347.



FIGUUR 5. Groeikromme van de Montbeillard's zoon ingetekend op het groeidiagram voor Nederlandse jongens



In nevenstaande figuur 6 is de groeisnelheid van de Montbeillard's zoon getekend. We zien dat de groeisnelheid in de peuter-periode van na de geboorte tot de leeftijd van 3 jaar snel afneemt van zeg 30 cm/jaar naar 6 à 7 cm/jaar. In de kindertijd van 3 tot pakweg 11 jaar neemt de groeisnelheid gestaag af, met uitzondering van een lichte groeispuurt rondom het zevende levensjaar (ook wel de midgroeispuurt of kinderspuurt genoemd). Tijdens de adolescentie van 11 tot 18 jaar vindt de puberteitsgroei-spuurt plaats met een pieksnelheid van rond de leeftijd van 14,5 jaar.



FIGUUR 6: groeisnelheid van de Montbeillard's zoon

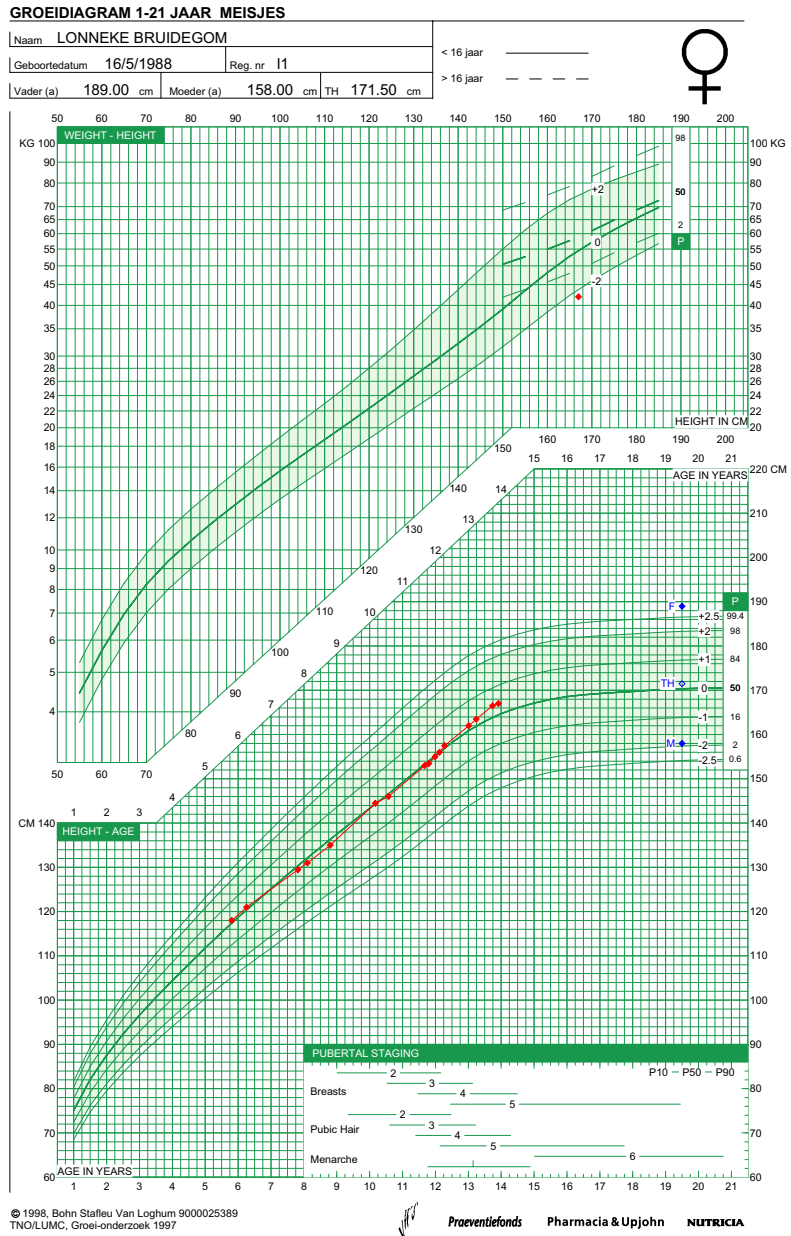
Overigens, de gegevens van Gueneau de Montbeillard's zoon zijn voor het nageslacht bewaard gebleven omdat graaf Georges Louis Leclerc de Buffon (1707–1788) deze opgenomen heeft in zijn bundel *À L'Histoire Naturelle. Supplément. Tome IV*.<sup>14</sup> Wanneer je deze tekst leest zul je ontdekken dat de Buffon niet alleen de puberteitsspuurt onderkent, maar ook de seizoensinvloeden op groei noemt en de variatie in lengte tijdens een dag opmerkt: in lente en zomer groeien kinderen nl. 2 tot 2,5 keer harder dan in herfst en winter en 's morgens is iedereen langer dan aan het einde van de dag (het verschil kan 1 à 1,5 cm zijn op een dag<sup>15</sup>). Hij is tevens de eerste wetenschapper die noteert dat meisjes eerder hun puberteitsspuurt hebben en eerder in lengte uitgegroeid zijn dan jongens.

In 1835 introduceerde Adolphe Quételet (1796–1874) in *Sur l'homme et le développement de ses facultés, essay d'une physique sociale*<sup>16</sup> het idee van de "gemiddelde mens" als de centrale waarde rondom welke de maten van een menselijk kenmerk zich groeperen volgens een normale verdeling. De gemiddelde mens van een bevolkingsgroep is volgens Quételet een individu waarvan elk van de fysiologische kenmerken gelijk is aan het gemiddelde van de fysiologische kenmerken van de andere individuen van de bevolking. Quételet mag met dit tweedelig verzamelwerk gerust de grondlegger van de moderne statistiek genoemd worden. Quételet introduceerde voor een breed lezerspubliek de eerste statistische studie van groei in lengte en gewicht van kinderen waarin niet de groei van een individu centraal staat, maar juist groepen van kinderen van dezelfde leeftijdsklasse en geslacht gemeten worden en van gemiddelde waarden uitgegaan wordt.

<sup>14</sup> Deze tekst is via de elektronische bibliotheek van de Nationale Bibliotheek van Frankrijk (<http://gallica.bnf.fr>) te raadplegen.

<sup>15</sup> De lengtefractie  $S$  na  $T$  uur, gemeten vanaf het moment dat men uit bed opstaat, wordt door D. Burgess (masters thesis, 1999, Australian Catholic University, North Sidney) geschat op  $S = \ln(-0.00216T + 2,7183)$ .

<sup>16</sup> Deze tekst is via de elektronische bibliotheek van de Nationale Bibliotheek van Frankrijk (<http://gallica.bnf.fr>) beschikbaar gesteld. Delen van de Engelse vertaling getiteld *Treatise on Man* uit 1842 zijn te vinden op website [www.maps.jcu.edu.au/hist/stats/quet](http://www.maps.jcu.edu.au/hist/stats/quet)



FIGUUR 7. Groeikromme van de Lonke Bruidgom ingetekend op het groeidiagram voor Nederlandse meisjes.

De spreiding in de cijfers voor een bepaalde leeftijdsgroep kan het best in diagrammen duidelijk gemaakt worden door percentielen te introduceren. Percentielijnen geven aan welk percentage van de groep een afmeting kleiner of gelijk aan de percentielwaarde heeft. In figuur 7 is bijvoorbeeld in het lengte-naar-leeftijd diagram de op één na bovenste kromme de 98<sup>e</sup> percentiel ofwel P<sub>98</sub>-lijn. Dit betekent dat in een grote groep Nederlandse meisjes van een bepaalde leeftijd 98% een lengte heeft die kleiner of gelijk is aan de P<sub>98</sub>-waarde op de gegeven leeftijd. Door de introductie van percentielijnen krijg je dus een dwarsdoorsnede van een populatie te zien. Voor het maken van een dergelijk diagram is een transversaal groeionderzoek nodig. Met de percentielijnen kun je elk individu vergelijken met leeftijdgenoten. In figuur 7 hebben we de lengtemetingen van Lonneke Bruidegom, dochter van een AMSTEL medewerker, getoeterd in het groeidiagram voor Nederlandse meisjes. Haar kromme volgt heel aardig de gemiddelde lengtekromme (aangeduid met P<sub>50</sub>) en ook is haar puberteitsspurt goed waarneembaar.

Op het lengte-naar-leeftijd diagram voor Nederlandse meisjes zie je overigens naast de percentielwaarden andere aanduidingen staan voor de referentielijnen: dit zijn zogenaamde standaarddeviatiescores (SDS). Zij geven de afwijking van het gemiddelde aan, uitgedrukt in het aantal standaarddeviaties (SD) dat de lengte verschilt van het gemiddelde voor deze leeftijdsklasse. Het grote voordeel van het gebruik van SDS-waarden is dat afstanden tussen SDS-lijnen gelijk zijn (bijvoorbeeld de afstand tussen 0 en 1 SDS is gelijk aan die tussen 1 en 2 SDS), dat sterk afwijkende lengtewaarden toch goed met een getalswaarde vastgelegd kunnen worden en dat een afbuiging van een groeikromme getalsmatig goed beschreven kan worden. Dit is voor de Wereldgezondheidsorganisatie reden geweest om te besluiten alle groeidiagrammen voortaan te baseren op SDS-lijnen. In de praktische oefeningen gaan we uitgebreid in op de Nederlandse groeidiagrammen en hoe deze te gebruiken zijn.

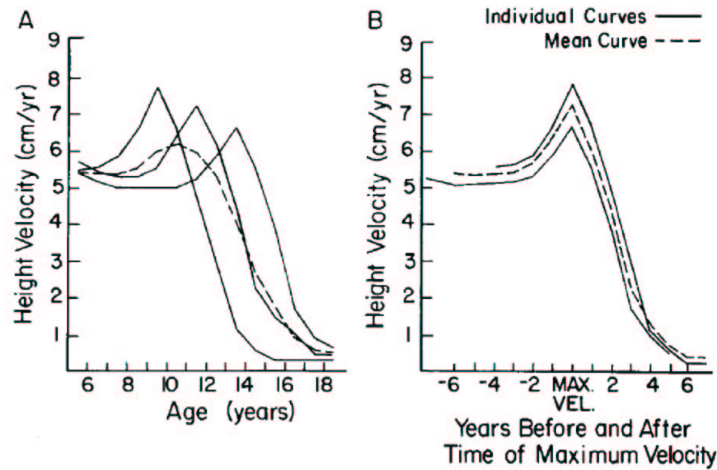
### 2.5. Hoe verloopt normale lengtegroei?

In het eerste levensjaar neemt de lengte met ongeveer 50% toe tot zo'n 75 cm en in het tweede levensjaar komt daar nog eens zo'n 12 à 13 cm bij. Je hebt dan ongeveer de helft van je eindlengte bereikt; vandaar de vuistregel "verwachte eindlengte = 2 × lengte op leeftijd van 2 jaar". Op voorspellingen van eindlengte komen we overigens later terug.

Vanaf 2 jaar wordt de groeisnelheid zo'n 6 cm per jaar. Dit wil niet zeggen dat de groei regelmatig verloopt; er zijn in de kinderjaren groeistuipe van 0,5 tot 2,5 cm in een paar dagen tijd, gevolgd door periodes waarin er hoegenaamd niets wijzigt. Ziekte kan een reden voor zo'n stilstaande periode zijn, maar na ziekte vindt in bijna alle gevallen een inhaalslag plaats, 'catch-up growth' genoemd, met soms een groeisnelheid van 400 keer de "gewone" snelheid.

Als een kind in de puberteit komt neemt de groeisnelheid ineens weer toe. Er is sprake van een groeispuurt, die bekend staat als puberteitsspurt. Bij meisjes is de puberteitsspurt zo'n 1,5 tot 2 jaar eerder dan bij jongens. Bij meisjes begint deze op de leeftijd van 10,5 à 11 jaar en bij jongens bij 12,5 à 13 jaar (ofschoon er grote variatie mogelijk is, zelfs bij tweelingen).

Overigens is de puberteitsgroeisput in groeidiagrammen minder uitgesproken dan in individuele groeikrommen. Dit komt doordat er een middeling van groeisputten plaatsvindt die niet allemaal in dezelfde periode plaatsvinden en dit maakt de grafiek gladder. Zie onderstaande figuur.<sup>17</sup>



FIGUUR 8. (A) individuele groeisnelheidskrommen en hun gemiddelde (stippellijn), die een individuele groeikromme niet goed representeert. (B) Dezelfde groeisnelheidskrommen en hun gemiddelde uitgezet tegen de tijd voor en na het tijdstip met peiksnelheid. Nu representeert de gemiddelde kromme wel goed een individuele groeikromme.

Na de puberteitssput neemt de groei snel af. 98% van de meisjes stoppen met lengtegroei op de leeftijd van 16,5 jaar; bij jongens ligt deze leeftijd dicht bij 18 jaar. Bij meisjes komt de eerste menstruatie meestal pas nadat de pieksnelheid in de puberteitssput geweest is. Je kunt er dan zeker van zijn dat de laatste fase van lengtegroei is ingetreden en dat het meisje niet veel langer meer zal worden. De lengte op het moment dat de menarche optreedt is dus een goede graadmeter voor de te verwachten eindlengte van meisjes. Op de website [www.medal.org](http://www.medal.org) van het Medical Algorithms Project, die een schat aan wetenschappelijke verbanden tussen lichaamsgrootheden bevat, is de volgende formule te vinden:

<i>leeftijd bij menarche (jr)</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
10	0,975	15,6
10,5	0,976	14,7
11	0,969	14,9
11,5	0,968	14,5
12	0,970	13,1
12,5	0,967	13,1
13	0,965	12,6
13,5	0,968	11,4
14	0,966	10,8
14,5	0,968	9,7
15	0,968	8,8
15,5	0,975	7,0
16	0,977	5,8

$$\text{voorspelde eindlengte (cm)} = a \times \text{lengte bij menarche (cm)} + b,$$

waarbij de constanten *a* en *b* uit bovenstaande tabel komen.

<sup>17</sup> Overgenomen uit B. Bogin, *Patterns of Human Growth*, Cambridge University Press (2<sup>e</sup> druk, 1999)

### 2.6. Wanneer begint en eindigt de puberteit?

Voor de Engelse wetgeving is het antwoord op bovenstaande vraag simpel: de puberteit begint wanneer een individu functioneel in staat is om een kind te verwekken en deze leeftijd is vastgesteld bij jongens op 14 jaar en bij meisjes op 12 jaar. In medische zin is de situatie veel complexer en bestrijkt de puberteit een periode van 2 tot 4,5 jaar waarin de seksuele rijping plaatsvindt. Puberteit treedt eerder op als er oudere broers en zussen zijn: tussen eerstgeborenen en zesde kind kan wel een jaar verschil zijn.

De puberteit is een periode in een mensenleven waarin veel verandert, zowel lichamelijk als geestelijk. De Engelse kinderarts J.M. Tanner heeft de ontwikkeling van de uitwendige geslachtskenmerken van jongens en meisjes tijdens de puberteit in stadia ingedeeld. In de groeidiagrammen (figuur 5 en 7) zijn rechtsonder de verschillende puberteitsstadia aangegeven met een horizontale lijn met daarop de  $P_{10}$ ,  $P_{50}$  en  $P_{90}$  percentielwaarden.

Voor meisjes is vooral het stadium van de mammaontwikkeling van belang als maat voor puberteitsontwikkeling. Vijf stadia worden onderscheiden:

- M1: alleen de tepel is verheven boven het vlak van de borst, zoals bij het jonge kind (prepubertair stadium);
- M2: ‘budding’-stadium: knopvormige verheffing van de tepelhof (areola) en vergroting van de diameter van de areola; lichte welving van de omgeving van de areola;
- M3: verdere welving van de mamma; voortgezette vergroting van de diameter van de areola; eerste duidelijke vrouwelijke mammavorm;
- M4: toenemende vetafzetting; de areola vormt een secundaire verheffing boven het niveau van de mamma (deze verheffing komt slechts bij de helft van de meisjes voor en kan soms blijven bestaan in de volwassenheid);
- M5: volwassen stadium, areola valt (meestal) terug in het niveau van de borst en is sterk gepigmenteerd.

De ontwikkeling van de pubisbehaarung is in zes stadia verdeeld, van geen beharing (P1) tot een volwassen beharingpatroon (P6). In het groeidiagram voor Nederlandse meisje kun je aflezen dat de menarche, de eerste menstruatie, bij 80% van de meisjes optreedt tussen 11,7 en 14,9 jaar met als mediaan 13,15 jaar (in 1997), ongeveer tweeënhalf jaar nadat Tanner-stadium M2 is ontstaan. Het tijdstip van de menarche is in ieder geval een belangrijk en goed te bepalen moment in de seksuele ontwikkeling. De menarche komt pas nadat de piek in de lengtegroeispuurt gepasseerd is en de groeisnelheid maximaal afneemt. Lange meisjes bereiken over het algemeen eerder seksuele volwassenheid dan korte meisjes, maar meisjes met een late puberteit en late groeispuurt worden in het algemeen langer dan degenen die eerder gaan menstrueren. Bij tweelingen of in extreme stress situaties is de menarche later in het algemeen. Er wordt gesuggereerd dat de menarche begint als een kritisch gewicht (47 kg, afhankelijk van ras) en een kritisch vetpercentage bereikt is. Voeding speelt in ieder geval een

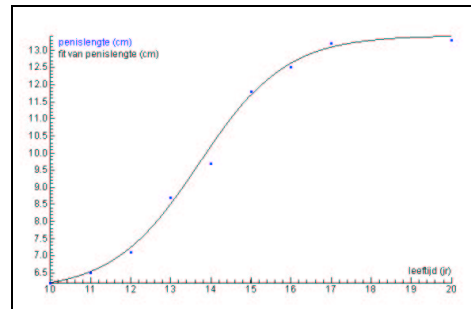
rol: anorexia patiënten, balletdanseressen en vrouwelijke atleten en gymnasten hebben vaker een latere menarche. In Europa en de VS treedt de menarche de afgelopen honderdvijftig jaar steeds vroeger op. Betere voeding in de eerste helft van de twintigste eeuw is de voornaamste reden. Op dit moment lijkt dit proces van vervroeging langzaam tot stilstand gekomen te zijn.

Andere lichamelijke veranderingen in de puberteit bij meisjes is de accumulatie van vet en de verandering van vetverdeling, zodat in deze periode het gewicht meer toeneemt dan tevoren, met relatief meer vetweefsel op de heupen. Terwijl na het tweede levensjaar tot de puberteitsspurten het gewicht toeneemt met 2,25 tot 3 kg per jaar, nemen meisjes tijdens de puberteitsspurten ongeveer 16 kg in gewicht toe. De piek van de gewichtstoename in de puberteit ligt ongeveer 3 maanden na de piek in de lengtegroei.

Bij jongens is het eerste teken dat de puberteit begonnen is de sterke toename in volume van de testes, ofschoon dit door de jongens zelf meestal nooit wordt opgemerkt. Kort daarna treden penisgroei en pubisbehaarung op, vanaf een testisvolume van 10 ml. Dit gaat dan samen met een lengtegroeierversnelling, die dus met name in de tweede helft van de puberteit plaatsvindt. Baardgroei en het bereiken van een volwassen beharingpatroon behoren tot de puberteitsveranderingen die het laatst voltooid zijn. Ook voor jongens wordt de puberteit in verschillende stadia ingedeeld. Voor de ontwikkeling van de genitaliën zijn dat:

- G1: testis, scrotum en penis hebben dezelfde grootte en vorm als bij het jonge kind (lengte  $\times$  breedte in mm van testes  $15 \times 10$ , volume  $< 2$  ml, penislengte 4 à 6 cm);
- G2: vergroting van scrotum en testis; de scrotumhuid wordt roder, dunner en gerimpeld; de penis vertoont nog geen of slechts weinig vergroting;
- G3: vergroting van de penis, vooral in de lengte, en verdere groei van testis, uitzakken van scrotum;
- G4: toenemende vergroting van de penis en het zichtbaar worden van de contouren van de glans, toenemende pigmentatie van scrotum (soms is dit stadium het gemakkelijkst te omschrijven als ‘nog net niet volwassen’);
- G5: volwassen stadium van penis en scrotum.

De kromme van de gemiddelde penislengte van Nederlandse jongens is S-vormig. Dit nodigt de wiskundige uit om na te gaan of dit met de sigmoïdale kromme van de vorm  $L = \frac{a}{1+e^{-bt}} + d$  goed beschreven kan worden. In nevenstaande figuur is het beste resultaat van de geeneraliseerde logistische regressie met  $a = 7,440$ ,  $b = 0,925$ ,  $c = 12,757$  en  $d = 5,990$  te zien.



FIGUUR 9: Gemiddelde penislengte van Nederlandse jongens.

### 2.7. Hoe lang kun je worden en kan de eindlengte voorspeld worden?

Mensen worden zelden langer dan 230 cm. De langste Nederlander ooit voor zover bekend was Rigardus (Rijn) Rijnout. De in 1959 overleden Reus van Rotterdam, die een afwijking aan zijn hersenklier had, was 237 cm. Dit is nog klein vergeleken met de vermoedelijk langste vrouw in de historie: dit is Trijntje Corneliszoon Keever uit Edam. Geboren in 1616 stierf ze op 2 juli 1633, 17 jaar oud en tijdens haar korte leven een kermisattractie met haar lengte tussen 255 en 260 cm. Haar overlijdensakte, schoenen en een schilderij naar ware grootte zijn te bewonderen in het Edams museum. Onomstotelijk bewijs dat zij inderdaad de langste vrouw ooit is bestaat niet. Misschien dat het Guinness Book of World Records versie 2000 om deze reden de Chinese Zeng Jenlian uit Yuiang als langste vrouw ooit noemt, met een lengte van 248 cm.

De langste man in de geschiedenis van wie er metingen beschikbaar zijn is onomstotelijk Robert Pershing Wadlow<sup>18</sup>, een Amerikaan geboren in 1918, die bij zijn dood op de leeftijd van 22 jaar 272 cm lang was. De langste, nog levende man resp. vrouw zijn (overigens niet geheel onbetwist) de Somalische vluchteling Xuseen Bisad, met een lengte van 237 cm, resp. de Chinese De-Fen Ya met een lengte van 235 cm. De kortste, nog levende man is vermoedelijk de Taiwanese Lin Yu-cheh, met een lengte van 67,5 cm. De Zuid-afrikaanse Madge Bester wordt gezien als de kleinste vrouw met haar 65 cm. Op diverse websites<sup>19</sup> zijn overzichten met dit soort gegevens te vinden.

Extreme lengtes zijn overigens geen pretje. Afgezien van lichamelijke en psychische klachten die hier vaak mee gepaard gaan, lopen lange en korte mensen dagelijks op tegen problemen met gebruiksvoorwerpen, vervoermiddelen, gebouwen, etc. die niet op hun afmetingen berekend zijn. Diverse clubs<sup>20</sup> behartigen de belangen van mensen met een extreme lengte of een groeistoornis. Zij fungeren ook als verenigingen om lotgenoten te ontmoeten en om samen leuke dingen te doen. Een van de conclusies uit de Nederlandse groeistudie van 1997 is overigens dat de gemiddelde lengte van de autochtone Nederlandse bevolking de grootste in Europa is en dat deze gemiddelde lengte nog steeds toeneemt. Het is dan ook niet zo gek dat de hoogte van plafonds en deuren per 1 januari 2003 met 20 cm omhoog gaan. Volgens een recent bouwbesluit<sup>21</sup> gaat de deurhoogte in nieuwbouwwoningen van 210 naar 230 cm, de plafondhoogte van 240 naar 260 cm en de trapopgangen worden verhoogd van 200 naar 230 cm.

De eerste vraag — hoe lang kun je worden? — is nu wel voldoende beantwoord. Maar hoe zit het met het voorspellen van de eindlengte en waarom wil je dit doen? De belangrijkste reden is nieuwsgierigheid, maar soms wil iemand

<sup>18</sup> Op de website [www.altonweb.com/history/wadlow](http://www.altonweb.com/history/wadlow) kun je een levensbeschrijving en groei-cijfers vinden.

<sup>19</sup> Zie [hilda.thevalkyrie.com/aboveall/tallest.htm](http://hilda.thevalkyrie.com/aboveall/tallest.htm), over lange vrouwen alleen, en [members.shaw.ca/harbord/heights.html](http://members.shaw.ca/harbord/heights.html), over lange en korte mensen in het algemeen.

<sup>20</sup> In Nederland heb je de Klub Lange Mensen ([www.languit.nl](http://www.languit.nl)) en de Belangenvereniging van Kleine Mensen ([www.bvkm.nl](http://www.bvkm.nl)).

<sup>21</sup> Zie [www.vrom.nl/Docs/wonen/bouwbesluitSTB.pdf](http://www.vrom.nl/Docs/wonen/bouwbesluitSTB.pdf) of [www.vrom.nl/Docs/wonen/artikel-bouwbesluit\\_lang.doc](http://www.vrom.nl/Docs/wonen/artikel-bouwbesluit_lang.doc)

ook vroegtijdig weten of hij/zij aan eisen voor bepaalde beroepen of sporten zal voldoen. De minimale lengte om bij de Koninklijke Luchtmacht<sup>22</sup> te mogen werken is bijvoorbeeld 155 cm (voor vrouwen) en 160 cm (voor mannen). Piloten mogen niet langer dan 193 cm en niet korter dan 163 cm zijn.

Een wonderformule om de eindlengte te voorspellen bestaat niet. Op zijn best kun je een schatting geven van of een verwachting uitspreken over de eindlengte. In de groeidiagrammen (figuur 5 en 7) kom je er zo'n eindlengtevoorspelling tegen: rechts in het lengte-naar-leeftijd diagram staan aan de rechterkant punten voor met de aanduiding F, M en TH. Ze horen bij de lengte van de biologische vader en moeder (F resp. M) en de streeflengte (TH, target height). De streeflengte is de lengte die een kind zou bereiken op basis van genetisch potentieel. De formules zijn voor Nederlandse kinderen (in cm):

$$TH_{\text{jongen}} = \frac{LV + LM + 6,5}{2} + 4,5 \quad \text{en} \quad TH_{\text{meisje}} = \frac{LV + LM - 6,5}{2} - 4,5$$

waarbij LV resp. LM staat voor de lengte van de biologische vader resp. moeder. Het getal 6,5 komt overeen met de helft van het gemiddelde lengteverschil in cm tussen volwassen Nederlandse mannen en vrouwen (volgens de groeicijfers uit 1997); het getal 4,5 heeft te maken met de verwachte lengtetoeename voor de komende generatie. Twee opmerkingen willen we nog kwijt over deze formule voor de streeflengte.

1. Elk land hanteert zijn eigen formule voor streeflengte. Duitsland gebruikt bijvoorbeeld de oorspronkelijk door J.M. Tanner ontwikkelde formule streeflengte = gemiddelde ouderlengte  $\pm$  6,5 cm, waarbij alleen gecorrigeerd wordt voor het gemiddelde verschil van 13 cm in de eindlengte tussen mannen en vrouwen. In Zwitserland is d.m.v. regressieanalyse de volgende formule gevonden: streeflengte (in cm) =  $0,718 \times$  gemiddelde ouderlengte + 57,6 (voor jongens), en + 44,6 (voor meisjes).
2. De formule voor de streeflengte zegt niets over het individu zelf maar enkel over de lengte van het nageslacht van de ouders met een bepaalde lengte. Elk kind uit het gezin heeft dezelfde streeflengte.

Allerlei formules zijn in omloop die wel rekening houden met de reeds bereikte lengte van een kind. Een simpele formule van deze soort zijn we al tegen gekomen: bij de leeftijd van 2 jaar is een verdubbeling van de lengte een aardige maatstaf. Als je deze formule toepast op de lengtegegevens van de Montbeillard (met een lengte van 89,9 cm op 2 jaar), dan zou een eindlengte van 179,8 cm voorspeld zijn en dat is een onderschatting van de bereikte eindlengte van ongeveer 6,5 cm. Een verbetering in de voorspelde eindlengte krijg je door lineaire regressie voor jongens en meisjes apart toe te passen op longitudinale data, waarbij de bereikte eindlengte uitgezet wordt tegen de lengte bij 2 jaar. De gegevens uit de Fels Longitudinale Studie<sup>23</sup> leveren de volgende formules

<sup>22</sup> Zie [www.werkenbijdeluchtmacht.nl](http://www.werkenbijdeluchtmacht.nl)

<sup>23</sup> Voor informatie over het Fels onderzoeksinstituut in de Amerikaanse staat Ohio verwijzen we naar [www.med.wright.edu/lhrc/fels.html](http://www.med.wright.edu/lhrc/fels.html)



op voor blanke Amerikaanse kinderen (in cm):

$$\begin{aligned} \text{eindlengte}_{\text{jongen}} &= 57,7 + 1,37 \times \text{lengte bij 2 jaar} \\ \text{eindlengte}_{\text{meisje}} &= 25,0 + 1,17 \times \text{lengte bij 2 jaar} \end{aligned}$$

Met deze formule is de voorspelde eindlengte van de Montbeillard's zoon gelijk aan 180,9 cm; inderdaad een kleine verbetering. Maar wat mogen we ook verwachten van dit spelen met een formule bedoeld voor kinderen met een andere achtergrond?

Een betere methode voor het voorspellen van de eindlengte is afkomstig van Khamis en Roche, die een lineair verband tussen de eindlengte, de gemiddelde ouderlengte en de lengte en het gewicht van een kind tussen 4 en 17 jaar veronderstelt. De algemene formule is dus

$$\text{eindlengte} = a + b \times L + c \times G + d \times \text{GLO},$$

waarbij L resp. G de huidige lengte resp. gewicht is, GLO staat voor de gemiddelde lengte van de biologische ouders, en  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$  parameters zijn die van leeftijd en geslacht afhangen. Voor meisjes op 14-jarige leeftijd geldt bijvoorbeeld volgens deze methode

$$\text{eindlengte} = 0,82360 + 0,85062 L - 0,13999 G + 0,20235 \text{ GLO}.$$

Voor Lonke Bruidegom (zie figuur 7) levert dit een verwachte eindlengte van 172,1 cm op. Deze voorspelde lengte ligt iets boven de streeflengte van 171,5 cm. Tellen we het gemiddelde lengteverschil van 7,6 cm tussen 21-jarige Nederlandse en Amerikaanse vrouwen bij de berekende eindlengte op dan komen we op een voorspelde eindlengte van 179,7 cm. Dit is wellicht iets realistischer, hoewel het gebruik van het gewicht in de formule tot nadenken zet: Nederlandse meisjes zijn namelijk volgens recente cijfers gemiddeld zwaarder dan Amerikaanse leeftijdsgenoten en dit gewichtsverschil neem je niet mee in het toepassen van de Amerikaanse formule voor een Nederlands meisje.

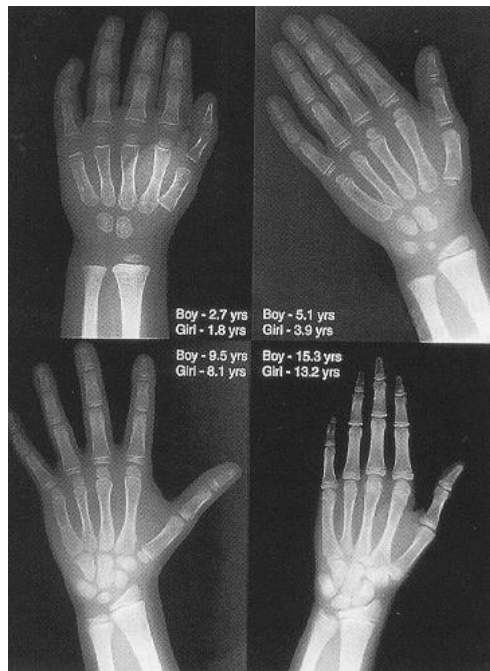
Voor de beste schatting van de eindlengte worden formules gehanteerd die ook rekening houden met de rijping van het skelet. De volgende vraag gaat hierover.

### 2.8. Wat is botleeftijd en wat wordt er mee gedaan?

De ontwikkeling van het skelet, uitgedrukt in botleeftijd of skeletrijpingscore, is een betere graadmeter voor de rijping van een kind dan de chronologische leeftijd alleen. De botrijping wordt beoordeeld door een röntgenfoto van de linkerhand en pols te vergelijken met referentie-atlasen, waarvan er twee het meest in gebruik zijn. De atlas van Greulich en Pyle<sup>24</sup> bestaat uit een reeks in de dertiger jaren opgenomen röntgenfoto's van speciaal geselecteerde 0,5- tot 18-jarige jongens en meisjes uit Cleveland, Ohio. Bij de foto van een kind moet men de meest bijpassende referentiefoto zoeken en dit geeft dan een schatting

<sup>24</sup> W.W. Greulich & S.J. Pyle, *Radiographic atlas of skeletal development of the hand and wrist*. Stanford University Press, California, 1959.

voor de botleeftijd. In figuur 10<sup>25</sup> is goed te zien dat de foto's er verschillend uitzien voor verschillende leeftijd vooral wat betreft de ruimtes tussen botjes.



FIGUUR 10. Bepaling van botleeftijd via röntgenfoto's.

De atlas van Tanner en Whitehouse<sup>26</sup> is gebaseerd op referentiefoto's van Engelse kinderen uit de jaren vijftig. Volgens de TW-methode worden 20 botjes — spaakbeen (radius), ellepijp (ulna), zeven handwortelbeentjes (carpalia), drie middenhandsbeentjes (metacarpalia) en acht vingerkootje (falangen) — apart gescoord, waarna deze individuele scores worden opgeteld tot een carpal score (optelling van alleen handwortelbeentjes), een RUS-score (optelling zonder handwortelbeentjes) en een totale score (optelling van alle 20 botjes). Deze methode is in principe nauwkeuriger dan de Greulich-Pyle methode omdat er rekening gehouden wordt met de variatie van verschillende handbotjes. De RUS-score (Radius-Ulna-Short bone score) wordt gebruikt in voorspellingen van de eindlengte. De volgende type formules worden gehanteerd:

$$\text{eindlengte} = \text{lengte} + b \times \text{RUS.score} + \text{constante}$$

$$\text{eindlengte} = \text{lengte} + a \times \text{ouderlengte} + b \times \text{RUS.score} + \text{constante},$$

waarbij  $a$  en  $b$  parameters zijn die van leeftijd en geslacht afhangen.

Een tweede toepassing van RUS-scores is het schatten van de leeftijd van mummies en van kinderen zonder ouders die ergens asiel aanvragen. In het

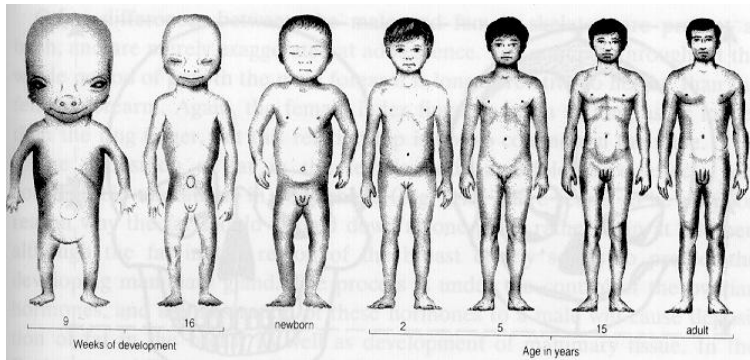
<sup>25</sup> Overgenomen uit J.K.H. Wales, *Clinicians' Guide To Growth Disorders*, Arnold Publishers, London, 2002, p. 19.

<sup>26</sup> J.M. Tanner et al, *Assessment of Skeletal Maturity and prediction of adult height (TW3 method)*, 3<sup>e</sup> druk, Saunders Harcourt Publishers, 2001.

laatste geval (en dat zijn zo'n miljoen kinderen) ontbreken vaak officiële documenten die uitsluitsel geven over de exacte leeftijd van een kind of zijn de identiteitspapieren onbetrouwbaar. Een goede leeftijdsbepaling is belangrijk omdat de rechten en plichten voor minderjarige asielzoekers anders is dan voor volwassenen. In veel Europese landen<sup>27</sup> wordt daarom bij asielzoekende kinderen altijd een medische test gedaan waarvan radiologisch onderzoek onderdeel uitmaakt.

### 2.9. Hoe veranderen de proporties van het menselijk lichaam?

Wie op tekenles gaat en daar afbeeldingen van mensen maakt, moet eerst meer leren over de normale menselijke afmetingen en met name over de onderlinge verhoudingen van lichaamsdelen. Deze veranderen ook van baby tot volwassene, zoals in onderstaande figuur<sup>28</sup> goed te zien is. Merk het relatief grote hoofd van de foetus op.



FIGUUR 11. Veranderingen in uiterlijke vorm van het menselijk lichaam.

In onderstaande tabel staat de verhouding van de gemiddelde lichaamslengte tot de hoofdlengte tijdens verschillende levensfasen.

Leeftijd (jaar)	1	4	8	12	16	volwassen	oud
lengte : hoofdlengte	4	5	6.5	7	7.5	8	7

Michelangelo's beroemde beeldhouwwerk in Florence<sup>29</sup> dat de jeugdige David die Goliath verslaat voorstelt heeft de ideale lichaamsmaten. De uitgebeelde persoon heeft een lengte van 7 hoofdlengtes, iets te klein, maar bedoeld om enerzijds de jeugdigheid te accentueren en anderzijds rekening te houden met perspectivische vertekening wanneer een toeschouwer van beneden af naar het beeld kijkt.

<sup>27</sup> Zie B. Ferenci, Separated Refugee Children in Austria, *International Journal of Refugee Law*, Vol. 12, no. 4. pp. 525-547.

<sup>28</sup> Overgenomen uit David Sinclair en Peter Dangerfield, *Human Growth after Birth*, 6<sup>e</sup> druk, Oxford University Press, 1998, p. 125.

<sup>29</sup> Zie het webadres [www.maths.adelaide.edu.au/pure/pscott/place/pm10/pm10.html](http://www.maths.adelaide.edu.au/pure/pscott/place/pm10/pm10.html)

In de schilder- en beeldhouwkunst wordt ook wel eens doelbewust afgeweken van de juiste lichaamsverhoudingen. Michelangelo's *Madonna met Kind* in de *Onze-Lieve-Vrouwekerk* te Brugge is daar een voorbeeld van: het kind heeft een relatief groot hoofd op een volwassen lichaam als verwijzing naar de grote geest en de grootste daden die nog verricht gaan worden.

Wereldberoemd is nevenstaande tekening van Leonardo da Vinci waarin hij een menselijke figuur naar het idee van Vitruvius afgebeeld heeft. Vitruvius had in zijn boek *De Architectura* als bewijs voor de harmonie en volmaaktheid van het menselijk lichaam beschreven hoe een welgebouwde man met gespreide handen en voeten precies past binnen de meest volmaakte wiskundige figuren, de cirkel en het vierkant. De navel is het centrum van de cirkel die de armen en voeten omvat. De verhouding tussen navelhoogte tot lichaamslengte is gelijk aan de gulden snede ( $\approx 8/5$ ). Het vierkant, met de penis in het midden ter verwijzing naar vruchtbaarheid, suggereert dat de spanwijdte gelijk is aan de lichaamslengte. Dit klopt in werkelijkheid ook wel aardig. Andere verhoudingen zijn: schouderbreedte is een kwart van de lengte, beenlengte is de helft van de lengte, kniehoogte is eenvierde van de lengte. Er is veel wiskundig interessante zaken te melden over deze figuur; we verwijzen naar de website [www.aiwaz.net/Leonardo](http://www.aiwaz.net/Leonardo).



FIGUUR 12: Da Vinci's man.

Allometrie houdt zich bezig met de verhoudingen van lichaamsgrootheden. De allometrische vergelijking zegt dat een grootheid evenredig is met een macht van een andere grootheid, waarbij de evenredigheidsconstante en de exponent vaak alleen constanten zijn voor een bepaalde periode. Lowe's verband<sup>30</sup> tussen oppervlak van het menselijk lichaam (in m<sup>2</sup>) en het lichaamsgewicht (in kg)

$$\text{lichaamsoppervlak} = 0,1 \times \text{lichaamsgewicht}^{0,66}$$

is een voorbeeld van zo'n vergelijking. Allometrische vergelijkingen en de verhoudingen van lichaamsmaten spelen een grote rol in de biomechanica, bijvoorbeeld om het zwaartepunt en het traagheidsmoment van een bewegende mens goed te kunnen schatten en om daaruit verdere conclusies te kunnen trekken over het verloop van een beweging.

Tot slot nog iets over wetmatigheden in de ontwikkeling van een gezond menselijk lichaam. Het hoofd is altijd verder gevorderd in de rijping dan de romp, en de romp is op zijn beurt weer verder in de ontwikkeling dan de ledematen. De perifere delen zijn eerder in ontwikkeling dan de centraler gelegen delen: de voet is eerder in ontwikkeling dan het onderbeen en dat op zijn beurt weer eerder dan het bovenbeen. Tijdens de groeispurt gaan handen en voeten het eerst sneller groeien, dan de onderbenen en onderarmen, vervolgens de

<sup>30</sup> Zie de website [www.medal.org](http://www.medal.org) van het Medical Algorithms Project

bovenbenen en bovenarmen, gevolgd door heupen en borstkas, en dan de schouders. Als laatste groeit de romp. De voeten stoppen het eerst met groeien, voor bijna alle ander delen van het skelet.

### 2.10. Kun je lichaamsgroei wiskundig modelleren?

Het antwoord is ja. We nemen als voorbeeld<sup>31</sup> de gemiddelde lengtegroei van Nederlandse kinderen. Het zelf bedenken van een wiskundig model gaat hierbij veel te ver en is waarschijnlijk tot mislukken gedoemd. Maar het uitproberen van een algemeen aanvaard en veelgebruikt model in de kindergeneeskunde hoort wel tot de mogelijkheden. We behandelen hier het zogenaamde KKP-model.<sup>32</sup> In dit wiskundige model worden drie componenten gebruikt die elk met een groeifase geassocieerd zijn:

1. *Kleutertijd* (0-3 jaar): geremde groei, waarbij lengtetoeename vanaf de geboorte exponentieel afneemt. De bijpassende formule is:

$$L_1 = a_1 - b_1 e^{-c_1 t}.$$

2. *Kindertijd*: lengtetoeename neemt lineair af (denk terug aan de groei van meisjes met Turner's syndroom) en leidt tot de volgende formule:

$$L_2 = a_2 t^2 + b_2 t + c_2.$$

3. *Puberteit*: logistische groei voor de bijdrage van de puberteitsspurts aan de lengte, met als formule:

$$L_3 = \frac{a_3}{1 + e^{c_3 - b_3 t}}.$$

Hierbij zijn  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$ ,  $a_3$ ,  $b_3$  en  $c_3$  parameters met positieve waarden, die op basis van de groeicijfers bepaald worden. De gemiddelde lengte  $L$  wordt op elke leeftijd gegeven door de som  $L_1 + L_2 + L_3$ .

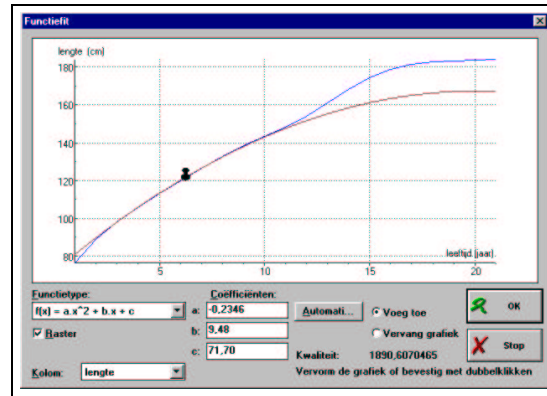
Hoe gaan we met dit model aan de slag? Omdat de component voor de kindertijd het enige onderdeel met niet-geremde groei is en we toch een realistische formule willen vinden voor lengtegroei van 0 tot 21 jaar is het verstandig hiermee te beginnen. We zoeken een bergparabool die enerzijds de groei tussen het derde en tiende levensjaar aardig beschrijft en anderzijds zijn maximum bereikt rondom de leeftijd van 20 jaar. De kleinste kwadratenmethode werkt in dit geval niet; we selecteren dan maar handmatig en op het oog een geschikte bergparabool. In onderstaande schermafdruk (figuur 13) zie je onze keuze van

$$\text{lengte} = -0,235 \text{leeftijd}^2 + 9,5 \text{leeftijd} + 71,7.$$

<sup>31</sup> Overgenomen uit André Heck, Een computerwerkplaats voor wiskunde. In *CWI vakantiecursus 2000*.

<sup>32</sup> In het Engels ICP-model genoemd, naar de fasen Infancy, Childhood en Puberty. zie J. Karlberg et al. Linear growth retardation in relation to the three phases of growth. In *Causes and Mechanisms of Linear Growth Retardation*. Waterlow & Schürch (red), Proceedings I/D/E/G/C Workshop, London, U.K., 1993. Elektronisch beschikbaar op webadres [www.unu.edu/unupress/food2/uid06e/uid06e00.htm](http://www.unu.edu/unupress/food2/uid06e/uid06e00.htm)

De punaise in de schermafdruk geeft aan dat we op die plaats de benadering vastgepind hebben. Door een ander punt op de parabool met de muis te verslepen is een andere tweedegraads kromme te maken. Als je de punaise door dubbelklikken losmaakt, kun je de parabool transleren. Op deze manier kun je in Coach op eenvoudige wijze met de muis in de hand een kromme van een voorgeschreven vorm construeren.

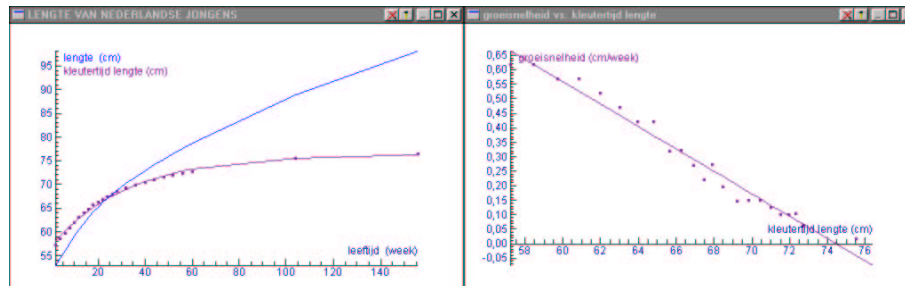


FIGUUR 13: Handmatige bepaling van de kromme voor groei in kinderperiode.

We verschuiven deze parabool in verticale richting zodanig dat een positieve bijdrage aan de totale lichaamslengte optreedt vanaf de leeftijd van 6 maanden. Kortom, we nemen als formule:

$$L_2 = -0,235t^2 + 9,5t - 4,7.$$

We trekken vervolgens deze bijdrage af van de groeicijfers voor lengtegroei in de eerste drie levensjaren. We krijgen zo aangepaste cijfers voor de lengte in de kleuterperiode. We veronderstellen geremde groei met een lineair afnemende groeisnelheid. Hoe goed of slecht dit model is merk je als je de groeisnelheid uitzet tegen de lengte. In het diagramvenster rechts in figuur 14 is de beste rechte lijn volgens de kleinste kwadratenmethode bij de punten getekend.



FIGUUR 14. Lengtegroei in de kleuterperiode

Links staan de grafieken van de oorspronkelijke groeicijfers in de kleuterperiode en de aangepaste cijfers, samen met de handmatig bepaalde kromme met formule

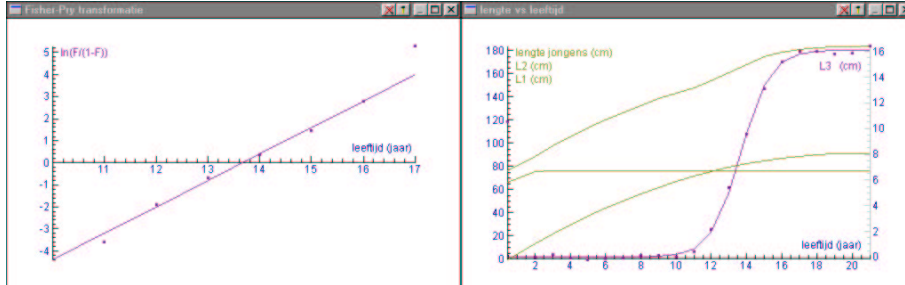
$$L_1 = 76,4 - 19,4e^{-1,56t},$$

waarbij de leeftijd  $t$  in weken gegeven is.

Komen we tenslotte bij de bijdrage van de puberteitsspurten. We trekken eerst de bijdragen  $L_1$  en  $L_2$  af van de gegeven groeicijfers en krijgen zo de bijdrage van de puberteitsspurten aan de lengte, genoteerd met  $L_3$ . Zoals in figuur 15 te zien is, lijkt de grafiek van  $L_3$  inderdaad op een logistische kromme. Met een trial-and-error methode kun je geschikte waarden vinden voor de parameters in de formule van een logistische kromme. Rechts in figuur 15 is de grafiek getekend van

$$L_3 = \frac{16,1}{1 + e^{16,4-1,2t}}.$$

De overeenstemming met de getekende punten, afkomstig van de echte groeicijfers uit 1997, is frappant.



FIGUUR 15. Bijdrage van de puberteitsspurten aan de lengte

Denk niet dat het KKP-model het enige succesvolle wiskundige model voor lengtegroei van jongens en meisjes is. In de literatuur<sup>33</sup> zijn diverse andere modellen te vinden. Twee gangbare modellen met respectievelijk 9 en 7 parameters zijn:

- Het trilogistische model van Bock en Thissen<sup>34</sup>, dat de volgende formule voor lengtegroei  $L$  hanteert:

$$L(t) = \frac{\theta_1}{1 + \exp\left(\frac{\theta_2 - t}{\theta_3}\right)} + \theta_9 \left( \frac{1 - \theta_8}{1 + \exp\left(\frac{\theta_4 - t}{\theta_5}\right)} + \frac{\theta_8}{1 + \exp\left(\frac{\theta_6 - t}{\theta_7}\right)} \right).$$

- Het JPPS-model<sup>35</sup>, met als formule:

$$L(t) = \theta_1 \left( 1 - \frac{1}{1 + (t/\theta_2)^{\theta_3} + (t/\theta_4)^{\theta_5} + (t/\theta_6)^{\theta_7}} \right).$$

<sup>33</sup> Zie F. Falkner & J.M. Tanner (red) *Human growth: a comprehensive treatise*. Vol. 3. Plenum Press, New York, 2<sup>e</sup> druk, 1986.

<sup>34</sup> Bock & Thissen, Fitting multicomponent models for growth in stature. In *Proceedings of the Ninth International Biometric Conference, Boston, August 22-27, 1976*, pp. 431-442, The Biometric Society, Raleigh, North Carolina.

<sup>35</sup> Jolicoeur et al. A lifetime asymptotic growth curve for human height. *Biometrics*, 44: 995-1003, 1988.

Wil je deze modellen kunnen toepassen dan moet je wel de beschikking hebben over een rekenprogramma dat niet-lineaire regressie toestaat en kennis of ervaring hebben in het schatten van beginwaarden van parameters. Het trilogistische model, toegepast op de gemiddelde lengte van Nederlandse jongens, levert als benadering op:

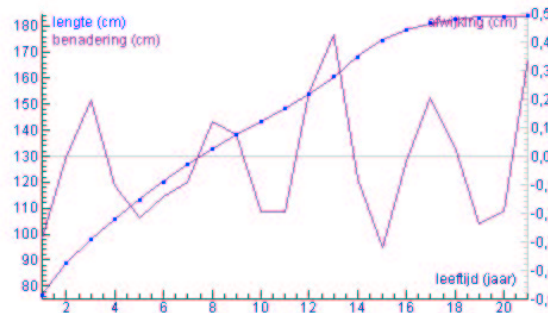
$$L(t) = \frac{48,1}{1 + e^{-2,29(t+0,09)}} + \frac{101,5}{1 + e^{-0,33(t-3,23)}} + \frac{34,9}{1 + e^{-0,71(t-13,32)}}$$

Afwijkingen met de echte groeicijfers zijn tussen 0 en 21 jaar minder dan 1 cm. Belangrijkste oorzaak van de tamelijk grote afwijkingen is dat de groei in het eerste levensjaar er niet zo goed mee beschreven wordt. Laat je deze periode weg en pas je het model toe op de groei tussen 1 en 21 jaar dan benaderen de resultaten de echte groeicijfers tot op een millimeter. Hetzelfde geldt voor het JPPS-model: de beste formule voor lengte tussen 1 en 21 jaar is

$$L(t) = 184,0 \left( 1 - \frac{1}{1 + (t/12,45)^{13,18} + (t/7,43)^{2,27} + (t/2,91)^{0,33}} \right)$$

en wijkt minder dan 2 mm af van de echte groeigegevens.

Wij kunnen tevreden zijn met het resultaat van het KKP-model. In figuur 16 zijn de bijdragen aan de lengte van de drie componenten bij elkaar opgeteld en samen met de echte groeigegevens getekend. De afwijking tussen de echte en berekende lengtes zijn minder dan een halve centimeter over de hele periode van geboorte tot volwassen lengte.



FIGUUR 16. KKP-model voor gemiddelde lengte van Nederlandse jongens

En dit alles met de betrekkelijk eenvoudige formule

$$L(t) = -19,4 e^{-1,56t} - 0,235 t^2 + 9,5 t + 71,7 + \frac{16,1}{1 + e^{16,4-1,2t}},$$

die helemaal opgebouwd is uit drie op school behandelde wiskundige modellen.

De opdracht wordt natuurlijk interessanter als je ook de gemiddelde lengte van Nederlandse meisjes met het KKP-model bestudeert. De formule wordt dan

$$L(t) = -18,7 e^{-1,65t} - 0,256 t^2 + 9,8 t + 69,7 + \frac{8,6}{1 + e^{12,4-1,1t}}$$



Je vindt dan een pubertaire groeispuurt met maximale lengtetoeename gemiddeld op de leeftijd van 11 jaar en 4 maanden en een bijdrage aan de volwassen lengte van 8,6 cm (bijna de helft van de 16,1 cm bij jongens). Je vindt zo een getalsmatige onderbouwing van het gegeven dat meisjes eerder in de puberteit geraken en ook eerder de bijpassende groeispuurt doormaken.

Longitudinale groeikrommen worden overigens op eenzelfde manier wiskundig gemodelleerd. Een van de meest populaire modellen bestaat uit sommen van bijdragen die logistisch van aard zijn. De formule is dan

$$L(t) = L(0) + \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{1 + e^{c_i - b_i t}},$$

met  $N = 2$  (bilogistisch),  $N = 3$  (trilogistisch) en zelf  $N = 6$  (hexalogistisch). Ook worden veel wiskundige modellen gebruikt van de vorm  $L(t) = g(t) + M(t)(U - g(t))$ , waarbij  $g(t)$  een formule voor de groeikromme vóór de puberteit is,  $M(t)$  een relatieve maat voor de volwassenwording (maturatie) op leeftijd  $t$  is en  $U$  de eindlengte is. In het Kanefuji-Shohoji model<sup>36</sup> wordt bijvoorbeeld voor  $g(t)$  het groeimodel van Count voor prepubertaire groei  $C + Dt + E \ln(1 + t)$  gekozen en wordt voor de maturatiefunctie  $M(t)$  de formule van Gompertz gebruikt, d.w.z.  $M(t) = \exp(-\exp(A - Bt))$ . Voor ander modellen verwijzen we naar het tijdschrift *Growth, Development & Aging*, dat bol staat van groeimodellen.

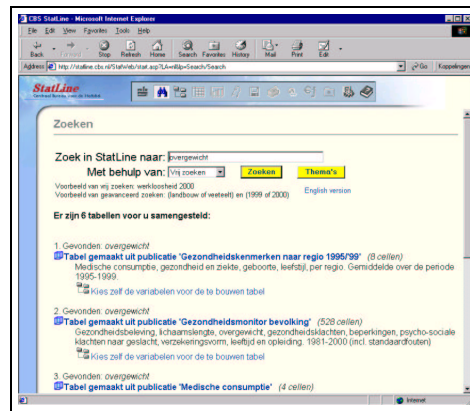
### 2.11. Hoe kom je aan actuele groeicijfers?

Als je groei van de huidige Nederlandse schoolkinderen wilt bestuderen is het van groot belang om de groeicijfers van de recentste landelijke groeistudie te gebruiken. Wil je ze vergelijken met leeftijdgenoten uit andere landen, dan moet je ook daar de up to date gegevens van hebben. En dan bedoelen we de cijfers en niet enkel en alleen groeidiagrammen. Je kunt natuurlijk vakliteratuur raadplegen en de groeicijfers daar uit overnemen, maar zoeken op Internet levert met veel speurwerk en wat geluk ook recente cijfers op. Echter niet voor Nederlandse kinderen! Commerciële motieven zorgen er wellicht voor dat de gegevens niet on-line aanwezig zijn. We zullen de belangrijkste cijfers van gemiddelde aan het einde van dit artikel bijsluiten.

Wat je wel kunt vinden op Internet zijn de Nederlandse cijfers van gemiddelde lengte, gewicht en overgewicht voor volwassenen in de afgelopen jaren (desgewenst uitgesorteerd naar geslacht, opleidingsniveau en verzekeringsvorm). Hiervoor kun je terecht bij de StatLine database van het Centraal Bureau voor Statistiek terecht; het webadres is `statline.cbs.nl`. Tussen twee haakjes, deze informatiebron is zeer aan te bevelen als je leerlingen praktische opdrachten en profielwerkstukken wilt laten doen waarbij statistische gegevens nodig zijn. We illustreren hoe dit kan gaan aan de hand van cijfers over overgewicht.

<sup>36</sup> K. Kanefuji & T. Shohoji, On a growth model of human height. *Growth. Del. & Aging*, 54 (1990) 155-165.

Op de website aangekomen kun je gelijk een zoekactie doen. In onderstaande schermafdruk zie je een deel van het resultaat met de zoekstring “overgewicht”. De eerste twee tabeltitels lijken al gelijk prijs en vermelden dat ze bij de publicatie Gezondheidsmonitor bevolking horen. Dit is informatie over waar de data uit de dataverzameling van CBS gehaald worden.



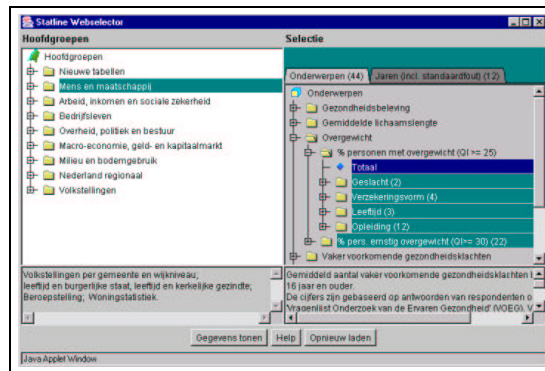
FIGUUR 17: StatLine startscherm.

Als je klikt op de tweede hyperlink dan krijg je een uitgebreide tabel met gegevens vanaf 1989, waarvan hiernaast een klein deel te zien is.

Onderwerpen	Totaal	Mannen	Vrouwen	Ziekenvonds	Particulier	Leeftijd
% personen met overgewicht (Q1 >= 25)						
						0-16, 17-24, 25-43, 44-63, 64 jaar of ouder
Jaren (incl. standaardfout)	%					
1989	35,4	39,0	32,0	36,7	33,3	31,7 33,6 24,2 48,2 51,3
1990	34,9	39,6	30,6	37,1	31,8	32,1 31,7 25,6 47,2 45,3
1991	35,1	39,3	31,1	36,1	33,6	33,6 24,7 47,4 48,8
1992	36,5	40,6	32,6	38,6	33,4	37,8 32,6 25,8 48,5 51,2
1993	36,4	40,7	32,2	37,2	35,0	36,5 34,7 27,1 46,7 48,4
1994	38,3	44,1	32,8	39,0	37,1	41,3 36,4 28,3 49,1 50,8
1995	37,9	41,2	34,7	38,7	36,4	39,2 35,9 27,5 49,8 48,6
1996	38,9	42,2	35,7	39,9	37,0	39,8 36,4 27,3 50,7 52,6

FIGUUR 18: Een StatLine tabel.

Het is verstandig om zelf selecties te gaan maken uit de CBS-database en zo de tabel naar eigen smaak in te richten. Je kunt daarvoor klikken de tabelknop in de taakbalk die dan de zogenaamde Webselector opent. De selector werkt ongeveer als de Windows Verkenner.



FIGUUR 19: StatLine Webselector.

Als je alleen het geslacht en de leeftijdscategorie kiest, dan krijg je de tabel hiernaast. Hierin zie je het alarmerende gegeven dat het aantal volwassenen met overgewicht toeneemt. Nog zorgwekkender is dat uit de cijfers blijkt dat het percentage Nederlandse volwassenen dat kampt met sterk overgewicht de afgelopen tien jaar bijna verdubbeld is. Het internationaal afgesproken criterium voor overgewicht van

Gezondheidstoestand van de Nederlandse bevolking									
Onderwerpen	Overgewicht								
	% personen met overgewicht (QI >= 25)					% pers. ernstig overgewicht (QI >= 30)			
	Totaal		Leeftijd			Totaal		Geslacht	Vrouwen
Mannen	Vrouwen	20-44 jaar	45-64 jaar	65 of ouder	Mannen	Vrouwen			
Jaren (incl. standaardfout)	%								
1989	35,4	39,0	32,0	24,2	48,2	51,3	6,3	5,0	7,6
1990	34,9	39,6	30,6	25,6	47,2	45,3	6,1	5,3	6,9
1991	35,1	39,3	31,1	24,7	47,4	48,8	5,8	5,0	6,6
1992	36,5	40,6	32,6	25,8	48,5	51,2	6,4	4,8	7,9
1993	36,4	40,7	32,2	27,1	46,7	48,4	6,1	5,5	6,7
1994	38,3	44,1	32,8	28,3	49,1	50,8	7,0	6,7	7,2
1995	37,9	41,2	34,7	27,5	49,8	48,6	6,9	5,6	8,2
1996	38,9	42,2	35,7	27,3	50,7	52,6	6,9	5,9	7,9
1997	40,5	44,4	36,6	30,2	50,8	53,4	8,1	6,8	9,4
1998	40,5	43,8	37,2	30,8	50,6	51,2	8,4	6,8	9,9
1999	42,3	46,9	37,8	33,0	51,4	53,3	8,7	7,2	10,1
2000	44,1	47,9	40,4	33,6	54,9	54,9	9,4	8,6	10,2

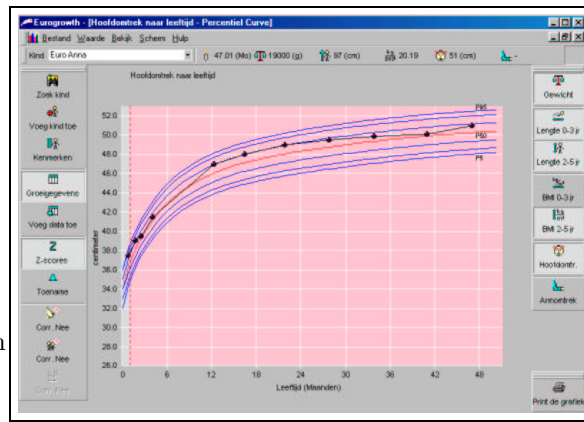
FIGUUR 20: BMI tabel.

volwassenen is een BMI-waarde groter dan 25. Bij een BMI-waarde groter dan 30 spreekt men van zwaar of ernstig overgewicht (ook wel adipositas of vetzucht genoemd). Aan te hoge BMI-waarde kleven gezondheidsrisico's zoals te hoge bloeddruk of hartklachten. Overigens, BMI staat voor Body Mass Index en is hetzelfde als de Quételet-index: BMI is dus gewicht (in kg) gedeeld door het kwadraat van de lengte (in m).

Zo moeilijk als het is om via Internet aan recente groeicijfers van Nederlandse kinderen te komen, zo gemakkelijk is dat voor Amerikaanse kinderen: Het National Center of Health Statistics stelt haar groeidiagrammen en groeicijfers naast aanvullende informatie op het webadres [www.cdc.gov/growthcharts](http://www.cdc.gov/growthcharts) ter beschikking. Het Medical Algorithms Projects heeft deze gegevens ook in Excel tabelformaat staan op [www.medal.org](http://www.medal.org). Groeicijfers van Engelse kinderen uit 1998 worden door het Britse ministerie van volksgezondheid vertrekt op webadres [www.doh.gov.uk/stats/crtables.htm](http://www.doh.gov.uk/stats/crtables.htm). Recente groeidiagrammen van Vlaamse schoolkinderen zijn gepubliceerd door het Ministerie van de Vlaamse Gemeenschap in Gezondheidsindicatoren 1998. Ze zijn beschikbaar op [www.wvc.vlaanderen.be/gezondheidsindicatoren/GI1998/pdf\\_98/](http://www.wvc.vlaanderen.be/gezondheidsindicatoren/GI1998/pdf_98/) als bestand [groeicurven.pdf](#). Recente gegevens over Duitse kinderen zijn in vakbladen<sup>37</sup> gepubliceerd, maar de cijfers over overgewicht zijn on-line beschikbaar in het rapport op webadres [www.a-g-a/112001-11-28.pdf](http://www.a-g-a/112001-11-28.pdf). Het Southeast Asina Mecical Information Center (SEAMIC) stelt op haar website [www.seamic-imfj.or.jp](http://www.seamic-imfj.or.jp) jaarlijks statistieken voor landen in de regio op. De SEAMIC Health Statistics 1999 bevatten de recentste cijfers over gemiddelde lengte en gewicht van kinderen uit onder andere Japan, Indonesië, de Filipijnen, Singapore, Thailand en Vietnam. Cijfers over Chinese kinderen uit Hong Kong zijn te vinden op webadres [fwcc.org/growthchart.html](http://fwcc.org/growthchart.html). Kortom, zoals eerder opgemerkt, met wat speurwerk is best veel te vinden op Internet.

<sup>37</sup> Zie Kromeyer-Hauschild et al. (2001) Perzentiel für den Body-mass-index für das Kindes- und Jugendalter unter Heranziehung verschiedener deutscher Stichproben, *Monatsschrift Kinderheilkunde*, 149 (8) 807–818.

Er zijn ook Europese referentiediagrammen ontwikkeld. Wie het leuk vindt om een professioneel groei-diagram voor kinderen jonger dan 5 jaar te maken kan hiervoor op de website [www.eurogrowth.org](http://www.eurogrowth.org) software downloaden. Een schermafbeelding van het lengte-naar-leeftijd diagram van ‘Euro-Anna’ staat hiernaast.



FIGUUR 21: Euro-growth diagram van Euro-Anna.

### 3. STILSTAAN BIJ GROEI IN DE KLAS

#### 3.1. Achtergronden

We willen allemaal onze leerlingen in de gelegenheid stellen om zelf actief betrokken te zijn bij het leren van wiskunde en andere schoolvakken. We willen dat ze zelfstandig werkzaamheden in het studiehuis kunnen uitvoeren, zoals zelf echte data verzamelen en verwerken, zelf wiskundige modellen ontwikkelen en simuleren, werken met interactieve video, omgaan met Internet, wiskundige berekeningen en experimenten uitvoeren m.b.v. software en rekenmachines, vermoedens formuleren en bewijzen, enzovoorts. We doen dit omdat we uit ervaring en onderzoek weten dat actieve leerlingen een beter begrip krijgen van wiskundige concepten, methoden en technieken dan leerlingen die op traditionele wijze les krijgen met alleen uitvoerige uitleg van de leraar en gevolgd door oefeningen uit het schoolboek.

Er zijn echter heel wat belemmeringen voor het bereiken van bovenstaande mooie doelstellingen. Onder andere hebben actieve leerlingen veel gereedschappen nodig om hun werk goed te kunnen doen en ze hebben tijd nodig om met deze gereedschappen te leren omgaan. Een gemeenschappelijke computerleeromgeving voor exacte vakken zou hier uitkomst bieden. Voor natuurwetenschappelijke vakken alleen bestaat er al zo'n omgeving, Coach geheten, die op de meeste Nederlandse scholen aanwezig is. In de afgelopen en komende jaren wordt aan het AMSTEL Instituut van de Universiteit van Amsterdam hard gewerkt om deze leer- en doe-omgeving aan te passen, te herontwerpen en uit te bouwen tot een  $\beta$ -breed inzetbare werkplaats, dus inclusief wiskunde.

Welke motieven om ICT bij wiskundeonderwijs in te zetten hebben we nog meer? Onder andere hopen en verwachten we dat het bijdraagt aan het realiseren van meer uitdagende, vakoverstijgende en meer realistische toepassingen van wiskunde, in de vorm van praktische opdrachten en profielwerkstukken. We hopen dat ICT op deze manier het wiskundevak aantrekkelijker voor leerlingen

maakt, met name voor wie niet door (abstracte) wiskunde alleen gemotiveerd wordt.

Om een beter inzicht te krijgen in deze mogelijkheden van ICT hebben André Holleman, wiskundedocent op het Bonhoeffer college te Castricum en deeltijds ‘leraar in onderzoek’ op het AMSTEL Instituut, en de auteur nieuw lesmateriaal ontwikkeld en uitgeprobeerd in de klas. Lichaamsgroei is als eerste onderwerp in de klas aan de orde gekomen. In deze sectie gespreken we de eerste resultaten.

### 3.2. *Het lesmateriaal*

Het lesmateriaal is bestemd voor 4 VWO leerlingen die nog geen ervaring hebben met praktische opdrachten bij wiskunde en die ook nog niet eerder met Coach gewerkt hebben of er slechts beperkte eigen ervaring mee hebben. Ons doel is om leerlingen te laten

- werken met echte data en met echte diagrammen die gebruikt worden in de gezondheidszorg;
- ervaren hoe interessante en bruikbare informatie uit diagrammen te halen valt;
- inzien dat de verandering van een grootheid vaak net zo belangrijk, zo niet interessanter is dan de grootheid zelf;
- oefenen met en verbeteren van ICT-vaardigheden;
- omgaan met eerder verworven wiskundekennis in praktisch werk.

Het lesmateriaal bestaat uit drie verplichte opdrachten:

1. *De Nederlandse Groeistudie uit 1997*. Een korte quiz geeft de leerlingen een idee van wat ze al weten over lichaamsgroei en puberteit. We gebruiken het krantenartikel ‘Hoe langer hoe dikker’ van Wim Köhler, dat op 4 juli 2000 in NRC Handelsblad verschenen is en dat elektronisch beschikbaar is op webadres [www.nrc.nl/W2/Nieuws/2000/03/04/Vp/wo.html](http://www.nrc.nl/W2/Nieuws/2000/03/04/Vp/wo.html), in de les om de landelijke groeistudie uit 1997 te introduceren en om het belang van goede groeigegevens te illustreren.
2. *Gemiddelde lengtegroei anno 1997*. In deze opdracht gebruiken leerlingen de cijfers uit de recentste landelijke groeistudie en het programma Coach om de gemiddelde lengte en lengtetoeename van Nederlandse jongens en meisjes te bestuderen. Het is de bedoeling dat ze verschillen en overeenkomsten tussen groei van jongens en meisjes achterhalen. Dit is geformuleerd in de volgende twee onderzoeksvragen: “(1) Hoe groeien Nederlandse jongens en meisjes in lengte tussen hun eerste en eenentwintigste jaar? (2) Welke verschillen en overeenkomsten zijn er?” Omdat dit vermoedelijk de eerste daadwerkelijke kennismaking met Coach is voor leerlingen, zijn de eerste onderdelen vooral bedoeld om bekend te raken met de software en in het

bijzonder om te leren werken met tabellen en grafieken. Ze leren hoe ze dataplots en toenamendiagrammen kunnen maken voor lengte-naar-leeftijd en hoe ze deze grafieken kunnen interpreteren in de context van lichaams-groei van een kind.

3. *Seculaire lengtegroei in 1980–1997*. Onder seculaire groei of seculaire groei-verschuivingen verstaat men de veranderingen in de ontwikkeling van kinderen van de ene generatie naar de andere. In deze opdracht gebruiken leerlingen de cijfers uit de groeistudies van 1997 en 1980 en het programma Coach om de veranderingen in gemiddelde lengte en lengtetoeename van jongens en meisjes in deze periode te bestuderen. Door vragen worden leerlingen gestimuleerd om zelf conclusies te trekken, deze te onderbouwen en ze goed op schrift te stellen. De onderzoeksvraag is voor leerlingen als volgt samengevat: “Welke veranderingen in gemiddelde lengte en lengtetoeename van jongens en meisjes hebben in de periode 1980–1997 plaatsgevonden? Formuleer en onderbouw je conclusies.”

Hierna doen leerlingen een kleine, zelfstandige onderzoeksopdracht over lichaamsgroei, waarbij ze kunnen kiezen uit vier opdrachten.

*A. Groeidiagrammen van autochtone Nederlandse kinderen*. In deze opdracht maakt een leerling kennis met groeidiagrammen van autochtone Nederlandse kinderen en de bijpassende terminologie. Hij/zij leert hoe deze diagrammen gemaakt worden, wat ze betekenen en hoe ze gebruikt worden. Eigen lengte en gewicht wordt vergeleken met die van leeftijdgenoten. Deze opdracht is vooral een pen-en-papier opdracht en is om deze reden in deze CWI vakantiecursus gekozen voor het onderdeel ‘praktische oefeningen’. De lestekst is in een apart hoofdstuk bijgevoegd.

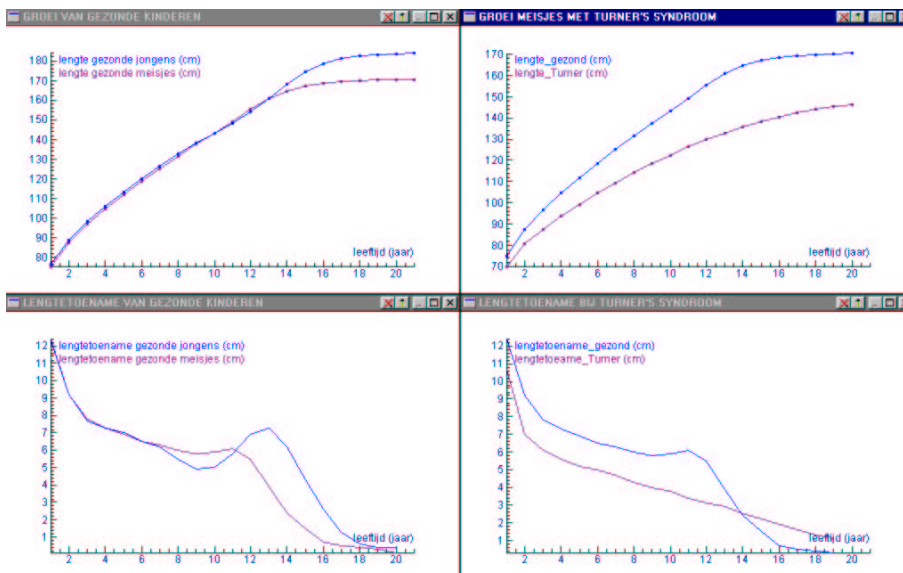
*B. Wiskundig model voor lengtegroei van meisjes*. In deze opdracht wordt de groei van meisjes met het syndroom van Turner vergeleken met die van gezonde meisjes. Een eenvoudig wiskundig model voor lengtegroei van meisjes tot hun puberteit wordt ontwikkeld en uitgetest. De onderzoeksvragen zijn als volgt geformuleerd: “(1) Welke verschillen in gemiddelde lengte en lengtetoeename zijn er tussen gezonde meisjes en meisjes met het syndroom van Turner? Formuleer en onderbouw je conclusies. (2) Bestaat er een simpele formule die goed past bij de gemiddelde lengte van meisjes met het syndroom van Turner? Zo ja, welke formule is dat en op welke leeftijd kan deze worden toegepast? (3) Bestaat er een simpele formule die goed past bij de gemiddelde lengte van gezonde meisjes tot een bepaalde leeftijd?”

*C. Gemiddelde groei in gewicht anno 1997*. Een leerling onderzoekt in deze opdracht de groei in gewicht bij Nederlandse jongens en meisjes tussen hun eerste en twintigste jaar. Hij/zij speurt naar overeenkomsten en verschillen en maakt een eenvoudig wiskundig model voor gewicht als functie van leeftijd voor kinderen tot hun puberteit. De onderzoeksvragen zijn ook precies zo geformuleerd.

*D. Wiskundig model voor gewicht als functie van lengte.* Hier onderzoekt een leerling het gemiddelde gewicht van Nederlandse jongens en meisjes als functie van hun lengte, met als uitkomst een wiskundig model voor gewicht naar lengte. De onderzoeksvragen zijn als volgt geformuleerd: “(1) Wat is het gemiddelde gewicht van Nederlandse jongens en meisjes uitgezet tegen hun lengte tot de leeftijd van 16 jaar? Welke verschillen en overeenkomsten zijn er? (2) Bestaat er een simpele formule die goed past bij het gemiddelde gewicht van jongens tot een bepaalde lengte? En voor meisjes? (3) Kun je lengte-intervallen vinden zodanig dat op elk interval een simpele formule bestaat die goed past bij het gemiddelde gewicht van jongens als functie van hun lengte? En voor meisjes?”

In alle opdrachten worden de groeicijfers in het lesmateriaal meegeleverd. Het lesmateriaal is beschikbaar op [www.science.uva.nl/~heck/research/groei](http://www.science.uva.nl/~heck/research/groei).

De rol van ICT in genoemde leerlingactiviteiten is om echte data te visualiseren, te verwerken en te analyseren. Als je de groeicijfers eenmaal in handen hebt, dan moet je deze gemakkelijk in een computerprogramma kunnen invoeren voor grafische presentatie en verdere wiskundige behandeling. Importeren van gegevens in database- of spreadsheet-formaat is nuttig voor snelle verzameling van bestaande gegevens. Om verschillen in gemiddelde lengtegroei tussen jongens en meisjes te kunnen ontdekken moet je beide grafieken samen met hun toenamendiagrammen in een voldoende groot beeldscherm in beeld kunnen brengen.

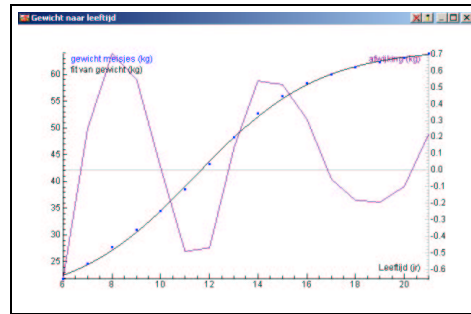


FIGUUR 22. Gemiddelde lengte en lengtetoeename van jongens en meisjes.

De grafieken aan de linkerkant in figuur 22 hebben betrekking op de gemiddelde lengtegroei van Nederlandse kinderen. Wat in de toenamendiagrammen

onmiddellijk opvalt is de groeispuurt in de puberteit en dat deze bij jongens later optreedt dan bij meisjes. Maar het is ook leerzaam te kijken naar groeidiagrammen van kinderen met groeistoornissen. In figuur 22 staan aan de rechterkant de groeidiagrammen en toenamendiagrammen getekend van gezonde meisjes en van meisjes met het syndroom van Turner. Twee symptomen van Turner's syndroom<sup>38</sup> zijn in de grafieken terug te vinden: trage groei en het ontbreken van de pubertaire groeispuurt. Bij meisjes met het syndroom van Turner neemt na het vierde levensjaar de lengtetoeename nagenoeg lineair in de tijd af. Anders gezegd, vanaf deze leeftijd kun je de gemiddelde lengte wiskundig beschrijven met een parabool. Hier merk je dat enige kennis van de relatie tussen de vorm van de afgeleide en de vorm van de oorspronkelijke functie van nut is. Bij lineaire regressie met een parabool krijg je afwijkingen van minder dan 1 mm tussen de regressiekromme en de echte gegevens voor meisjes met het syndroom van Turner. Wie durft nog te zeggen dat het werken met echte gegevens zo lastig is binnen wiskunde? Het lijkt meer een kwestie van geschikte toepassingen zoeken.

In de keuzeopdrachten B, C en D gebruiken leerlingen het regressiegereedschap binnen Coach om soortgelijke experimentele modellering van groeikrommen uit te voeren. Dit kunnen ook snel doen omdat er diverse regressiemodellen voorhanden zijn. Bijvoorbeeld kun je nagaan of toename in gewicht bij meisjes tussen 6 en 21 jaar met de sigmoïdale kromme van de vorm  $L = \frac{a}{1+e^{-bt}} + d$  goed beschreven kan worden.



FIGUUR 23: Sigmoïdale benadering van gewicht-naar-leeftijd.

In de figuur is het beste resultaat van de gegeneraliseerde logistische regressie met  $a = 46,97$ ,  $b = 0,40$ ,  $c = 4,59$  en  $d = 17,73$  te zien. De grafiek van de residuen is in hetzelfde diagram te zien met een eigen verticale as. De afwijking tussen de echte en berekende gewichten blijkt minder dan  $0,7 \text{ kg}$ <sup>39</sup> op elk moment tussen 6 tot 21 jaar. Voorwaar een mooie benadering met een betrekkelijk eenvoudig en goed te interpreteren regressiemodel dat op school behandeld wordt.

### 3.3. Het experiment in de klas

Het experiment in de klas vond plaats in maart 2001 in een 4 VWO A klas op het Bonhoeffer college met 26 leerlingen die voor het N&G profiel gekozen hadden en die mevrouw Ruiter-de Winter als wiskundelerares hadden. De praktische opdracht was hun eerste bij wiskunde en telde mee als proefwerk in het laatste deel van het schooljaar. De leerlingen werkten met zijn tweeën samen gedurende

<sup>38</sup> Niet-wiskundige informatie over het syndroom van Turner en andere groeistoornissen kun je vinden op de website van de Belangenvereniging Van Kleine Mensen ([www.bvkm.nl](http://www.bvkm.nl))

<sup>39</sup> Een relatieve afwijking van minder dan 3%.



twee weken; geschatte studielast was 8 uur. In de eerste week vond het werk vooral plaats in het computerlab tijdens de reguliere wiskundelessen van 45 minuten. De lerares, André Holleman en de auteur waren daarbij aanwezig als assistenten van de leerlingen. In de tweede week werd van de leerlingen verwacht dat ze helemaal zelfstandig hun werk zouden doen, gebruikmakend van de computerfaciliteiten op school of thuis. Van de leerlingen werd verwacht dat ze zouden inleveren (1) een met een tekstverwerker gemaakt verslag met antwoorden en resultaten van de opdrachten; (2) een diskette met hun Coach activiteiten en resultaten; (3) een ingevulde vragenlijst over wat ze van de praktische opdracht nu eigenlijk vonden, of ze problemen ondervonden hadden en waar dan wel, en hoe lang ze met verschillende onderdelen bezig waren geweest.

In ons experiment in de klas wilden we antwoord krijgen op de volgende vragen.

- Maakt het leerlingenmateriaal en de gekozen opzet het mogelijk dat leerlingen, die geen praktische ervaring met Coach hebben, de juiste vaardigheden aanleren en voldoende ervaring opdoen om met name de grafiek- en tabelgereedenschappen in de leeromgeving effectief in te kunnen zetten bij hun studie van lichaamsgroei?
- Wat vinden leerlingen van Coach?
- Wat vinden leerlingen eigenlijk van het onderwerp, van het lesmateriaal en van het werken met echte groeigegevens?
- Aangezien het de eerste keer is dat de leerlingen bij wiskunde een praktische opdracht doen en de computer hierbij gebruiken, wat zijn hun eerste reacties en welke problemen komen ze tegen?

De onderzoeksmiddelen die we ingezet hebben om antwoorden te krijgen op deze vragen zijn klassiek: observaties in de klas; fimpopnames en van één leerlingenteam integrale opnames van het computerscherm op een videoband; een vragenlijst; de ingeleverde verslagen.

Uit de vragenlijst destilleren we de meningen van leerlingen over het geheel. We verdelen ze in drie categorieën.

*Meningen van leerlingen over het gebruik van Coach.* Alle leerlingen antwoorden op de vraag welke dingen ze handig en praktisch vinden om met Coach te doen dat het fijn is om snel tabellen en grafieken te kunnen maken en deze te kopiëren in het verslag. Wat ze ook prettig vinden is dat de instructies niet alleen op papier, maar ook binnen de Coach activiteiten op de computer staan. Als minpunt melden ze dat het bewaren van resultaten soms een computer crash veroorzaakte<sup>40</sup> en dat de uitleg in de tekst soms onduidelijk voor ze was. Sommige leerlingen schrijven op dat het fatsoeneren van grafieken, zodanig dat

<sup>40</sup> De belangrijkste reden voor het niet altijd goed functioneren van Coach bij bewaren van resultaten was dat de software anders geïnstalleerd was op school dan de makers van de software voorzien hadden.

ze er precies uitzien als je wilt, lastig is. Het grootste probleem hierbij lijkt te zijn dat unieke namen voor grootheden en labels langs de assen vereist worden. Daarentegen wil je vaak een enkel woordje opschrijven zoals bijvoorbeeld “lengte”, terwijl je in je eigen hoofd wel bijhoudt of uit de context wel blijkt dat je “lengte van jongens” dan wel “lengte van meisjes” bedoelt.

*Meningen van leerlingen over het onderwerp en het lesmateriaal.* Bijna alle leerlingen vinden de quiz en het krantenartikel een aardige introductie. De opdracht helemaal aan het begin om een schetsje te maken van lengte en gewicht naar leeftijd levert geanimeerde discussies op over geboortegewicht, eindlengte, etc., precies zoals het bedoeld is. Alleen de lengte van het krantenartikel staat leerlingen tegen. De helft van de leerlingen vindt de 15-minuten klassikale introductie van Coach aan het begin van het practicum te kort. Uit de vragenlijsten valt niet op te maken of de leerlingen de Coach instructie duidelijk en voldoende vinden. Over het aantal hints klagen de leerlingen niet. Alle leerlingen melden dat de structuur van de tweede opdracht, die een gesloten vorm heeft van expliciete deelvragen voordat de beantwoording van de oorspronkelijke onderzoeksvraag komt, hen geholpen heeft in het geven van een korte beschrijving van de lengtegroei van Nederlandse kinderen. De helft van de leerlingen meent ook dat de derde opdracht over seculaire lengtegroei in 1980–1997 goed aansluit op wat ze daarvoor geleerd hebben over Coach. Aan de andere kant, schrijft ook de helft van de leerlingen op dat deze opdracht naar hun mening niet goed aansluit bij hun kennis van wiskunde.

*Ervaringen van leerlingen.* Alle leerlingen vinden het prettig dat ze een keuze hebben voor de slotopdracht. Sommigen geven toe dat ze die opdracht kiezen waarvan ze denken dat die de gemakkelijkste is, anderen (meestal meisjes) geven meer persoonlijke redenen. Gitta en Caroline motiveren bijvoorbeeld hun keuze voor opdracht C als volgt:

“Wij zitten nu zelf ook op een leeftijd dat we zwaarder worden en we vinden het daarom interessant om het gemiddelde gewicht te onderzoeken.”

Inge en Annemieke kiezen voor opdracht A omdat:

“Het verslag is zonder Coach; wij zijn niet zo heel goed met de computer.”

Linda en Joni, die lengtegroei van meisjes bestuderen, schrijven op:

“Syndroom van Turner leek ons interessant en je moest wat voor meisjes uitrekenen en dat is dan leuk om te zien of het ook bij je klopt.”

Geen van de leerlingen vindt de praktische opdracht gemakkelijk, maar de voornaamste klacht is eigenlijk tijdgebrek.<sup>41</sup> Het verbaast niet dat de antwoorden van leerlingen op de vraag hoe de praktische opdracht bevallen is variëren van “Niet zo heel goed. Hadden meer tijd nodig.” en “redelijk, het was namelijk

<sup>41</sup> De klacht is terecht omdat de tijd die leerlingen nodig hadden om met Coach te leren werken, mede door storende foutjes in het lesmateriaal, te kort bemeten was.

moeilijk en 't vergt veel tijd.”, tot “Goed. Beter dan normale lessen. Wel een beetje veel werk.” en “Goed hoor, je hebt veel vrijheid. Alleen was de tijd best kort. Als de proefwerkweek er niet was hadden we het niet afgekregen.” Kortom, zoveel leerlingen, zoveel smaken. De een prefereert gewone wiskundelessen waarin de leraar altijd in de buurt is om tekst en uitleg te geven, de ander vindt het prettig meer vrijheid in het werk te hebben of vindt het onderwerp gewoon interessant. Inge en Annemieke formuleren dit laatste als volgt in een reactie die ze nog kwijt willen naar aanleiding van de praktische opdracht:

“Het is leuk, weer eens wat anders dan het gewone boek en het was wel een interessant onderwerp.”

We gaan door met onze bevindingen op basis van de observaties in de klas en de verslagen van de leerlingen. Het meeste indruk maakt de goede kwaliteit van het werk van de leerlingen in het algemeen. Gitta en Caroline beschrijven bijvoorbeeld de verandering in gemiddeld gewicht van Nederlandse kinderen op de volgende manier.

“Tot hun 8<sup>e</sup> neemt het gewicht van jongens en meisjes geleidelijk toe, hierbij moet wel worden toegevoegd dat de meisjes gemiddeld iets lichter zijn dan de jongens. Vanaf het 8<sup>e</sup> levensjaar zijn meisjes gemiddeld zwaarder dan jongens dit komt waarschijnlijk doordat meisjes iets eerder in de puberteit komen dan jongens en er veel veranderingen optreden in het lichaam. Deze gewichtstoename duurt tot het 14<sup>e</sup> levensjaar en vanaf deze leeftijd worden de jongens zwaarder dit kun je zien omdat de groene lijn onder die van de blauwe lijn doorloopt. Vanaf het 14<sup>e</sup> levensjaar neemt het gewicht van jongens nog enkele jaren toe en blijven uiteindelijk zwaarder dan de meisjes.”

Het feit dat ze het verschil in groei relateren aan de verschillende periode waarop jongens en meisjes in de puberteit komen verdient een pluim.

Een tweede voorbeeld van degelijk werk is onderstaande beschrijving van Linda en Joni van het verschil in lengtegroei tussen gezonde Nederlandse meisjes en meisjes met het syndroom van Turner.

“Het verschil in lengte van meisjes met en zonder turner's syndroom valt tot 2 jaar nog mee. Je kan ook duidelijk zien dat ze de puberteit zo ongeveer overslaan. Daar waar een gezond meisjes namelijk harder gaat groeien in de puberteit en er een piek te zien is in de grafiek, dit is niet het geval voor meisjes met het Turner's syndroom, zij groeien als het ware constant.”

Ongeacht zwaktes in de wiskundige formulering, hebben deze leerlingen kennelijk wel enige notie van wat ze met het lengte-naar-leeftijd diagram en het bijpassende toenamendiagram kunnen doen.

De manier waarop leerlingen grafieken maken, lezen en interpreteren is in talloze onderzoeken<sup>42</sup> bekeken. Wat wij gezien hebben in onze groep leerlingen is dat ze in het algemeen geen problemen hebben met interpretaties van

<sup>42</sup> Zie bijvoorbeeld G. Leinhardt et al. Functions, Graphs and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research* 60 (1):1-64, 1990. en referenties hierin.

grafieken op middenniveau. Lokale processen, d.w.z. processen die te maken hebben met het aflezen van punten in grafieken, zijn gemakkelijk voor leerlingen. Echter, de meeste vragen in het lesmateriaal zijn interpretatievragen waarin de grafiek als geheel aan bod komt en die dus te karakteriseren zijn als het aflezen van intervallen in een grafiek. Ook hier hebben de leerlingen geen grote moeite mee. In de literatuur genoemde problemen als het verwarren van interval en punt komt niet voor. Misschien omdat in het lesmateriaal in de vraagstellingen steeds heel precies is aangegeven of een enkele leeftijd bedoeld wordt of een bepaalde leeftijdsperiode.

Alleen één deelvraag in de opdracht over lengte-naar-leeftijd — Wie groeit er het hardst en op welke leeftijd? — zet sommige leerlingen op het verkeerde been. Zij gebruiken niet het toenamendiagram om de vraag te beantwoorden, maar verwarren een uitspraak als “jongens groeien harder dan meisjes” met “jongens zijn langer dan meisjes”. Zij kijken dan in het lengte-naar-leeftijd diagram wanneer de lengtegrafiek van jongens boven die van meisjes uitkomt. Dit is een voorbeeld van de in de onderzoeksliteratuur bekendstaande ‘hellinghoogte verwarring’, hetgeen inhoudt dat leerlingen de verandering van een grootheid en de grootheid zelf door elkaar halen. Het kan echter ook betekenen dat leerlingen er niet bij stilstaan of er niet aan gewend zijn om de verandering van een grootheid op zichzelf interessant te vinden of misschien wel interessanter dan de grootheid zelf.

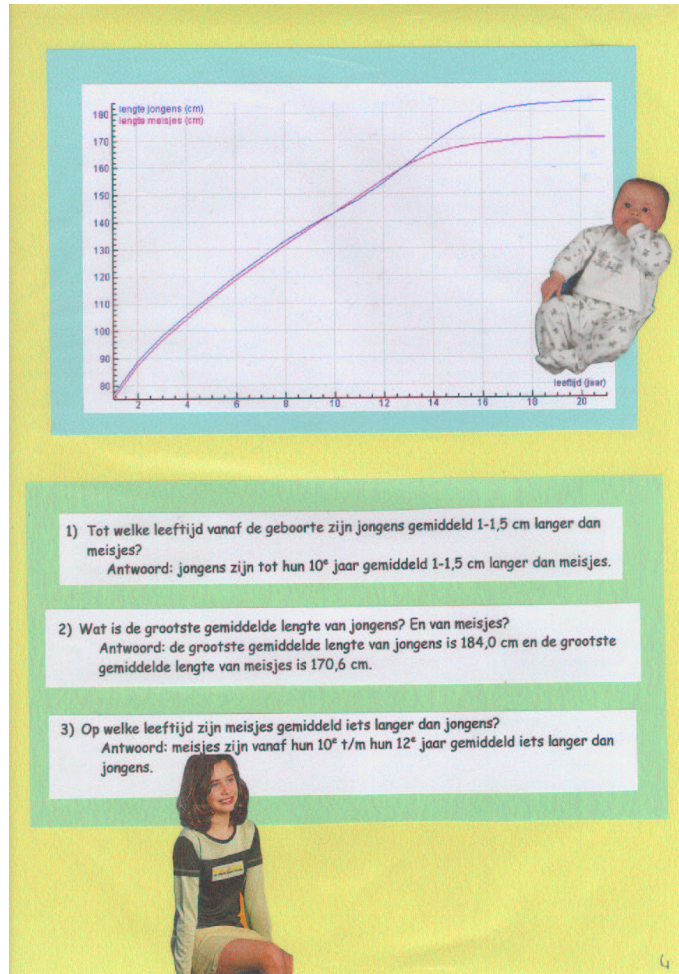
Leerlingen vertonen totaal geen moeite met diagrammen in Coach waarin een tweede verticale as staat, ondanks het feit dat ze die in het wiskundeboek niet eerder tegengekomen zijn. Het wordt in de opdrachtenreeks voor het eerst gebruikt in de deelopdracht om de grafiek van het verschil in lengte tussen jongens en meisjes te tekenen. Bianca en Floor leggen op de volgende manier uit hoe je deze tweede as gebruikt: “de tweede verticale as is voor de schaal van het verschil. Zo kun je beter de lijn zien en is het niet zo klein.”

Leerlingen, met name zij die de instructies letterlijk volgen, hebben wel eens problemen met meervoudig gebruikte namen en vergeten dat namen van grootheden uniek moeten zijn. Zij lezen bijvoorbeeld in de instructies dat de toename van de lengte voor jongens de naam ‘toename’ krijgt. Als hen vervolgens gevraagd wordt om het toenamendiagram voor de lengte van meisjes te maken, dan voeren ze de instructies letterlijk opnieuw uit en hergebruiken de naam ‘toename’ nu voor de toename in lengte voor meisjes, in plaats van een meer specifieke naam voor de grootheid te kiezen. De software weigert en klaagt terecht over dubbele namen. Maar leerlingen verwachten dit kennelijk niet en staan er niet bij stil. De meeste problemen met de software zijn overigens geen sta-in-de-weg voor leerlingen om uiteindelijk tot resultaten te komen. Leerlingenteams helpen elkaar bij moeilijkheden of onduidelijkheden.

Coach heeft het gereedschap ‘functiefit’ om met verschillende regressiemodellen te kunnen werken. We merken op dat leerlingen de vrijheid nemen om elk regressiemodel uit te proberen. Bij de gewicht-naar-lengte groeikromme in opdracht D wordt bijvoorbeeld door leerlingen zonder meer geprobeerd te fitten met een rationale uitdrukking of met een gegeneraliseerde exponentiële kromme. Als je daarentegen vraagt om een simpele formule als benadering, dan wordt

steevast lineaire regressie toegepast; een kwadratische fit wordt kennelijk niet meer als een eenvoudige benadering opgevat. Leerlingen vinden het ook lastig om een groeiproces in stukjes op te delen en deze onderdelen afzonderlijk te bekijken; in ieder geval doen ze dit bijna nooit uit zich zelf.

We eindigen met wat algemene opmerkingen. Meisjes presteren beter dan jongens in dit experiment en zwakke leerlingen maken een kans om beter voor de dag te komen dan gewoonlijk. Meisjes lijken meer geïnteresseerd te zijn in het onderwerp dan jongens en zij besteden meer aandacht aan hun verslag. Sommigen gaan zover dat ze hun verslag opleuken met plaatjes. Een voorbeeld van zo'n pagina is te zien in figuur 24. Geen wonder dat leerlingen dan vinden dat ze tijd te kort komen voor de werkzaamheden. We vatten het op als een teken dat ze plezier in het werk gehad hebben.



FIGUUR 24. Voorbeeld van een gedecoreerd verslag.

## 4. BRONNEN

## 4.1. Boeken

De voornaamste boeken zijn:

J.L. van den Brande et al (red.) *Kindergeneeskunde*. 3<sup>e</sup> druk, Elsevier Gezondheidszorg, 1998.

F. Falkner & J.M. Tanner (red.) *Human Growth - A Comprehensive Treatise*. 2<sup>e</sup> druk, Plenum Press, New York, 1986.

S. de Muinck Keizer-Schrama et al (red.), *Diagnostiek van kleine lichaamslengte bij kinderen*. Uitkomsten CBO Consensusbijeenkomst, 1998.

D. Sinclair & P. Dangerfield. *Human Growth after Birth*. 6<sup>e</sup> druk, Oxford University Press, 1998,

J.M Tanner et al. *Assessment of Skeletal Maturity and prediction of adult height (TW3 method)*, 3<sup>e</sup> druk, Saunders Harcourt Publishers, 2001.

J.K.H. Wales. *Clinicians' Guide To Growth Disorders*. Arnold Publishers, London, 2002.

J.M. Wit (red.) *De Vierde Landelijke Groeistudie (1997)*. Boerhave Commissie, 1998.

J.M. Wit et al (red.) *Groeistoornissen*. Elsevier/Bunge, 1999.

## 4.2. Artikelen

De drie belangrijkste artikelen over groei van Nederlandse jongens en meisjes komen uit *het Nederlands Tijdschrift voor Geneeskunde*, 145e jaargang, nr. 27 van 7 juli 2001. Hierin staan ook de recentste groeicijfers. De artikelen zijn:

A.M. Fredriks et al. De Quetelet-index ('body mass index') bij jongeren in 1997 vergeleken met 1980; nieuwe groeidiagrammen voor de signalering van ondergewicht, overgewicht en obesitas. (p. 1296–1303)

A.M. Fredriks et al. Voortgaande toename van de lengtegroei bij Nederlandse kinderen in de periode 1955-1997. (p. 1308–1315)

R.A. Hirasings et al. Toegenomen prevalentie van overgewicht en obesitas bij Nederlandse kinderen en signalering daarvan aan de hand van internationale normen en nieuwe referentiediagrammen. (p. 1303–1308)

## 5. CIJFERS VAN GEMIDDELDE LENGTE, GEWICHT EN BMI VAN NEDERLANDSE JONGENS EN MEISJES

In onderstaande tabel staan de groeicijfers van de gemiddelde lengte (in cm), het gemiddelde gewicht (in kg) en de gemiddelde BMI (Quetelet-index; in kg/m<sup>2</sup>) voor autochtone Nederlandse jongens en meisjes van 0-21 jaar. De cijfer zijn ontleend aan J.M. Wit (red.) *De Vierde Landelijke Groeistudie (1997)*. Boerhave Commissie, 1998.

Leeftijd	Lengte (cm)		Gewicht (kg)		BMI (kg/m <sup>2</sup> )		
	<i>jongen</i>	<i>meisje</i>	<i>jongen</i>	<i>meisje</i>	<i>jongens</i>	<i>meisje</i>	
<i>week</i> 4	54,5	53,6	7,1	6,6	14,4	14,0	
<i>jaar</i> 1	76,6	75,1	10,2	9,6	17,4	16,8	
	2	88,9	87,5	13,0	12,3	16,4	16,1
	3	98,1	96,7	15,2	14,7	15,9	15,7
	4	105,8	104,5	17,4	16,9	15,6	15,5
	5	113,1	111,8	19,8	19,2	15,5	15,4
	6	120,1	118,7	22,4	21,8	15,5	15,5
	7	126,6	125,2	25,0	24,7	15,6	15,7
	8	132,8	131,5	27,9	27,8	15,8	16,0
	9	138,3	137,5	30,8	31,0	16,1	16,3
	10	143,2	143,3	33,8	34,5	16,4	16,7
	11	148,2	149,2	37,2	38,5	16,8	17,2
	12	154,0	155,3	41,5	43,2	17,3	17,8
	13	160,9	160,8	46,8	48,3	17,9	18,5
	14	168,2	164,7	52,9	52,7	18,5	19,2
	15	174,4	167,1	58,8	56,0	19,2	19,8
	16	178,7	168,6	63,8	58,4	19,9	20,3
	17	181,3	169,3	67,4	60,0	20,4	20,8
	18	182,6	169,8	70,1	61,3	20,9	21,2
	19	183,2	170,2	72,0	62,3	21,4	21,5
	20	183,6	170,5	73,7	63,1	21,8	21,8
21	184,0	170,6	75,3	63,9	22,1	22,1	

TABEL 1. Gemiddelde lengte, gewicht en BMI van Nederlandse kinderen.