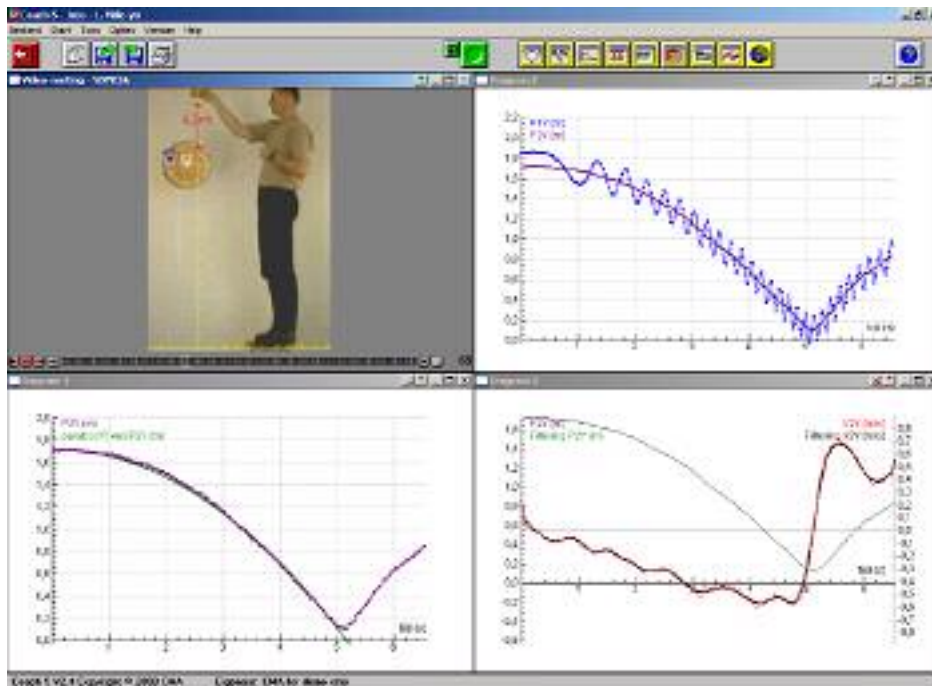


# Heftig jojoën

*Wil je een uitdagender onderwerp voor leerlingen dan een voorwerp dat valt onder invloed van de zwaartekracht, hang het object dan eens aan een touw dat je op een as rolt (maak er dus een jojo van). De combinatie van valbeweging, rotatie en de beperkte lengte van het touw maakt de uiteindelijke beweging niet alleen ingewikkelder, maar ook spannender om te bestuderen. Met videometen kun je experimentele gegevens van de jojo verzamelen, met wis- en natuurkunde kun je de verschijnselen proberen te begrijpen en te beschrijven, en met een modelleerprogramma kun je model en werkelijkheid met elkaar vergelijken. We doen dit voor een zelfgemaakte jojo van buitengewoon formaat.*



## Videometen met Coach

In bovenstaande schermafdruk van een videometing zie je linksboven de videoclip waarin een docent een zelfgemaakte jojo op en neer laat gaan. De jojo is gemaakt uit twee zittingen van laboratoriumkrukken en door de abnormale grootte van het voorwerp geloven leerlingen hun eigen ogen niet als de jojo traag af- en oprolt. Je ziet ze denken “hoe kan de jojo zo traag bewegen en weer omhoog oprollen? Welk trucje zit hier achter?” Niks geen trucje!

Natuurkunde helpt dit verschijnsel te begrijpen en te beschrijven.

Maar om theorie en praktijk goed met elkaar te kunnen vergelijken is het handig eerst maar eens gegevens van de op- en neergaande beweging te verzamelen. De posities van de volgende twee punten op de jojo worden in de videoclip opgemeten: de draaias en het punt dicht bij de rand gemarkeerd met een sticker. In het diagram rechtsboven zie je de verticale posities van deze twee punten tegen de tijd uitgezet. We hebben hier te ma-

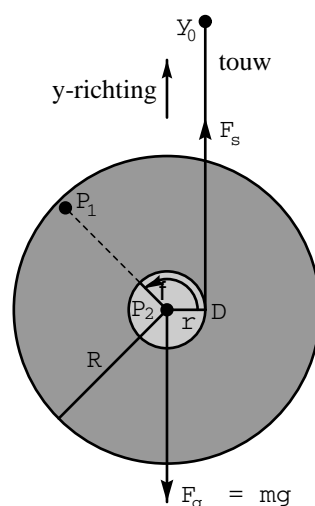
ken met een verticale verplaatsing van het zwaartepunt (dat samenvalt met de draaias), waarvan uit het diagram linksonder blijkt dat deze goed te beschrijven is met een parabool. Dit lijkt in tegenspraak met het diagram rechtsonder, waarin de verticale snelheid van de draaias is uitgezet tegen de tijd, maar de golvende beweging heeft te maken met een lichte slingerbeweging van de jojo. Dit kun je ook gemakkelijk achterhalen of controleren door de video te scannen terwijl de grafiekenvensters in uitleesmodus gezet zijn. De verticale snelheid van de draaias is dus een superpositie van een rechte lijn met een sinusoïde en deze rechte lijn past bij de paraboolbeschrijving van de neerwaartse beweging van de draaias van de jojo. De verplaatsing van het punt aan de rand van de schijf is een superpositie van de verplaatsing van het zwaartepunt van de jojo en de verticale projectie van een versnelde cirkelbeweging. Het is een versnelde cyloïde.

### Wis- en natuurkundige beschrijving van de jobeweging

Tijdens het omlaag gaan van de jojo zijn in het ideale geval tegelijkertijd twee bewegingen te onderscheiden: een draaiende beweging om de as (rotatie) en de verplaatsing langs een rechte, verticale lijn (translatie). In het geval van een jojo is er een direct verband tussen de rotatie en de translatie. Hoe precies en wat dit betekent voor de totale beweging kun je door toepassing van mechanicawetten uitzoeken. Het is hierbij verstandig om over de volgende vormen van energie

na te denken: energie t.g.v. zwaartekracht ( $E_p$ ), energie t.g.v. de verticale beweging ( $E_t$ ) en energie t.g.v. de draibeweging ( $E_r$ ).

Laten we eerst notationele afspraken maken (zie onderstaande figuur). Onze jojo heeft massa  $m$ , een draaias met straal  $r$ , bestaat uit twee cirkelvormige schijven met straal  $R$  en is opgehangen aan een touwtje met spankracht  $F_s$ . Deze tegenkracht van het touw grijpt aan in het punt  $D$ . Dit is het punt waar rondom de jojo momenteel af- en oprolt. Het krachtmoment ten gevolge waarvan de jojo draait is  $M = F_s r$ . Ons assenstelsel kiezen we, net als in de videoclip te zien is, zodanig dat de  $y$ -as door het ophangpunt van het touw, d.w.z. door de vaste positie van onze hand waarmee we het touw vasthouden ( $y_0$ ) loopt. We kijken alleen naar de verticale beweging en oriënteren ons assenstelsel zodanig dat de positieve  $y$ -as opwaarts is en de positieve  $x$ -as naar rechts is. De snelheid en versnelling van het zwaartepunt noteren we zoals gebruikelijk met  $v$  en  $a$  (let op: in onze keuze van oriëntering van het



assenstelsel zijn deze grootheden negatief bij een neergaande jojo). De hoek van het lijnstuk van het zwaartepunt  $P_2$  naar het punt  $P_1$  bij de rand van de schijf met de horizontale as noteren we met  $\phi$  (dus:  $\phi(t=0) = 90^\circ$ ). De hoeksnelheid en hoekversnelling van de schijf noteren we zoals gebruikelijk met de symbolen  $\omega$  en  $\alpha$ . De letter  $g$  staat voor gravitatieconstante. Het traagheidsmoment van de jojo geven we aan met de letter  $I$ . We laten de jojo los op tijdstip  $t=0$  en nemen aan dat het punt  $P_1$  op de rand op dat moment verticaal boven het zwaartepunt  $P_2$  ligt, in zijn hoogste stand.

De wetten van Newton geven:

$$(1) \quad \text{som van krachten} = ma \text{ oftewel } -mg + F_S = ma.$$

$$(2) \quad M = I\alpha \text{ oftewel } F_S r = I\alpha.$$

$$(3) \quad v = -r\omega \text{ en dus } a = -r\alpha.$$

Uit (2) en (3) volgt  $F_S = -\frac{Ia}{r}$ . Substitutie in (1) geeft:

$$(4) \quad a = -\frac{g}{1 + I/mr^2}.$$

Voor de jojo met twee cirkelvormige schijven met straal  $R$ , onderling verbonden met een as geldt  $I = \frac{1}{2}mR^2$ .

Invullen in (4) levert op:

$$(5) \quad a = -\frac{g}{1 + R^2/2r^2}.$$

De versnelling is een negatieve constante en dit betekent dus voor de snelheid dat  $v = -\omega r = at$  en dat de hoeksnelheid lineair van de tijd afhangt volgens de formule

$$(6) \quad \omega = \frac{gt}{r(1 + R^2/2r^2)}.$$

Kijken we nu nog eens naar de drie energievormen die in het spel zijn.

Voor de zwaarte-energie geldt:

$$(7) \quad \begin{aligned} E_p &= mgy = mg(y_0 + \frac{1}{2}at^2) \\ &= mgy_0 - \frac{1}{2}mg^2t^2 \frac{1}{1 + R^2/2r^2} \end{aligned}$$

Voor de rotatie-energie geldt overeenkomstig:

$$(8) \quad E_r = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mg^2t^2 \frac{R^2}{2r^2(1 + R^2/2r^2)^2}$$

Tot slot geldt voor de kinetische translatie-energie:

$$(9) \quad E_t = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mg^2t^2 \frac{1}{(1 + R^2/2r^2)^2}.$$

Optelling van vergelijkingen (7), (8) en (9) levert inderdaad op dat de som van de drie energieën op elk tijdsmoment constant is, namelijk.

$$(10) \quad E_p + E_r + E_t = mgy_0 = E_p(t=0)$$

Omdat de energievormen kwadratisch van tijd afhangen en er ook een kwadratisch verband is tussen de verticale positie van het zwaartepunt en de tijd ( $y = y_0 + \frac{1}{2}at^2$ ) zijn alle energieën evenredig met de verticale positie van het zwaartepunt van de jojo.

De verticale verplaatsing van ons punt  $P_1$  aan de rand van de schijf, zeg genoteerd met  $\eta$ , is een superpositie van de verticale verplaatsing  $y$  van het zwaartepunt  $P_2$  en de verticale projectie  $y_{\text{rot}}$  van de cirkelbeweging. Er geldt:  $y_{\text{rot}} = R \sin \phi$  met

$$\phi = \frac{y_0 - y}{r} + \frac{\pi}{2} = -\frac{at^2}{2r} + \frac{\pi}{2}, \text{ m.a.w.} \quad (11)$$

$$\eta = y + y_{\text{rot}} = y_0 + \frac{1}{2}at^2 + R \cos\left(\frac{at^2}{2r}\right)$$

$$\text{met } a = -\frac{g}{1 + R^2/2r^2}.$$

Voor de totale verticale snelheid van het punt  $P_1$  aan de rand van de schijf geldt na differentiatie dus:

$$(12) \quad v_\eta = at \left( 1 - \frac{R}{r} \sin\left(\frac{at^2}{2r}\right) \right)$$

We zijn dus in staat om de neergaande jojo op natuurkundige gronden in formulevorm te beschrijven. De opwaartse beweging gaat net zo: het is alleen nodig om op diverse plaatsen tekens te veranderen. De formules zijn er niet alleen als hobby voor de leraar, maar gaan ook ergens over en helpen bij het begrijpen van verschijnselen. Bijvoorbeeld, als de cirkelschijven van de jojo groter zouden zijn, dan volgt uit formule (6) dat de hoeksnelheid kleiner is. Formule (10) is niets anders dan de wet van behoud van energie. Het moge duidelijk zijn dat er bij de gemaakte afleidingen ook een groot beroep gedaan wordt op de formulevaardigheden en kennis van goniometrie. We kunnen dus best spreken over een wiskundige en natuurkundige beschrijving van de jojo.

## Model en realiteit

De formules uit de vorige sectie kunnen gebruikt worden in een modelleeromgeving om de beweging van de jojo te simuleren. Maar niet alleen de formules in hun volledig uitgewerkte versie spelen een rol bij het construeren van het computermodel: met name de formules bij basale natuurkundewetten zoals  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$  of verbanden zoals  $a = dv/dt$  en  $\alpha = d\omega/dt$  doen hun intrede in computerprogramma's (zie het kader met een fragment van de Coach code). Wat het model van de jjobeweging lastig maakt is de eindigheid van het touw zodat er op enig moment een omslag is van neergaande naar omhooggaande beweging. Je moet dan

```

dv := a*dt
v := v + dv
w := abs(v)
als w > vmax dan
  vmax := w
eindals
omega := abs(v/r_i)
dy := v*dt
y := y + dy
s := y0 - y
phi := s / r_i + pi/2
x := 0 + r_p*cos(phi)
y := y + r_p*sin(phi)
E_p := m*g*y
E_r := 0,5*I*omega^2
E_t := 0,5*m*v^2
E_tot := E_p + E_r + E_t
t := t + dt

```

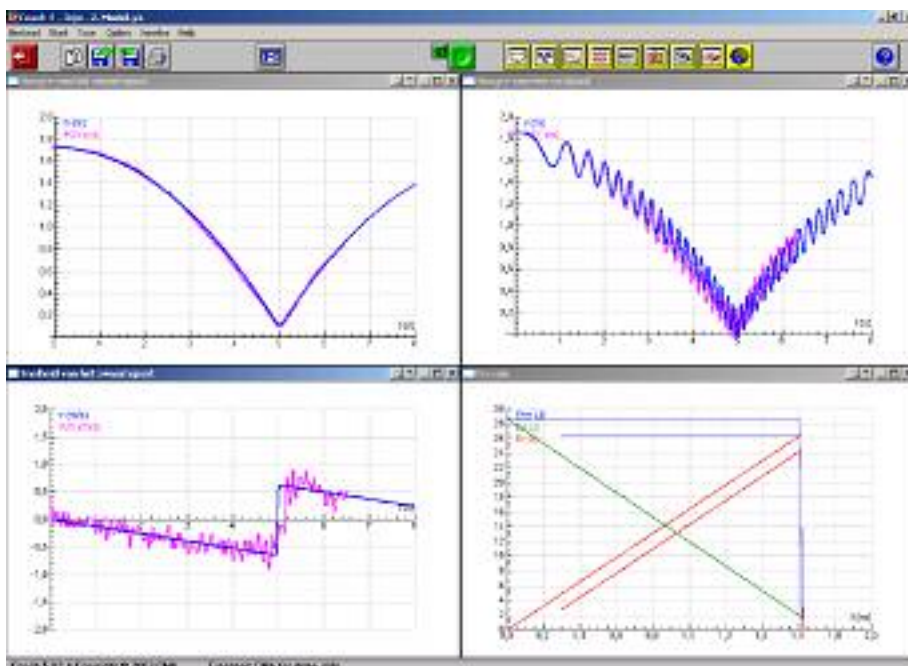
in je formules en overeenkomstig in het computermodel op diverse plaatsen tekens veranderen. Bijvoorbeeld moet je bij een opgaande beweging de relatie  $v = r\omega$  en  $a = r\alpha$  (vergeleijk met formule (3)) nemen. Dit speelt door in de rest van het formulewerk.

Voordat we het (computer)model met de werkelijkheid kunnen vergelijken maken we nog een aanpassing van het model: totnogtoe verwaarlozen we wrijving, maar zoals we allemaal weten komt de jojo in werkelijkheid niet tot zijn oorspronkelijke hoogte terug. We passen het model aan door te veronderstellen dat bij elke sprong van de jojo in het laagste punt een fractie van de energie verloren gaat. Ook het kantelen van de jojo in zijn laagste stand om het draaipunt D is in ons computermodel verwerkt.

In onderstaande schermafdruk staan de resultaten van onze computersimulatie, steeds tegen de achtergrond van de meetresultaten van de videometing.

In de vier kwadranten staan grafieken van de hoogte van het zwaartepunt van de jojo, de hoogte van het punt op de rand van de jojoschijf, verschillende energievormen (potentiële energie t.g.v. zwaartekracht, kinetische translatie-energie en de totale energie), en de snelheid van het zwaartepunt. In de simulatie is gekozen voor een verlies van 5% aan energie tijdens de overgang van neerwaartse in opwaartse beweging. De resultaten van de simulatie en de videometing stemmen wonderbaarlijk goed overeen.

Onderstaande schermafdruk toont grafieken van de snelheid van het zwaartepunt en van de verticale positie van het randpunt die berekend zijn in een simulatie waarin rekening gehouden is met energieverlies en op een langere tijdschaal doorgerekend is. Hierover kun je vragen stellen als "hoe neemt de maximale snelheid van de jojo (in zijn laagste punt) af bij elk omslagpunt?" of "hoe verklaar je de verschillen in grafiekvorm van het randpunt op het moment dat de jojo steeds in de buurt van zijn bovenste punt komt?"

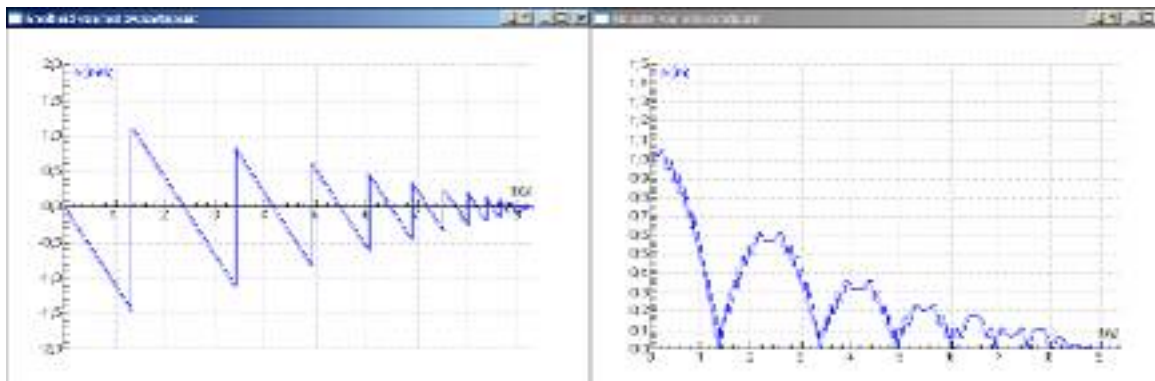


## Wat valt er nog meer te ontdekken?

In het werk dat we totnogtoe besproken hebben is er sprake van een sterke wisselwerking tussen modelvorming gestoeld op natuurkundige principes, computersimulatie, experimenteel onderzoek en het gebruik van wiskundige methoden. Wat nog een beetje onderbelicht is gebleven is de combinatie met het zelf formuleren door leerlingen van onderzoeksvragen die je met het arsenaal aan experimentele en theoretische methoden kunt proberen te beantwoorden. Met de modellen kun je bijvoorbeeld antwoord proberen te vinden op de vraag of je kunt jojoën op de maan of

in de ruimte, en zo ja, waarin dit verschilt van jojoën op aarde.

Over de bevestiging van het touw aan de as hebben we nog niets gezegd, maar dit is van grote invloed op de beweging van de jojo (kijk eens op de website [www.howstuffworks.com/yo-yo.htm](http://www.howstuffworks.com/yo-yo.htm)). Ook de vorm van de jojo speelt een belangrijke rol: kun je ook met jojo's met een vierkante vorm i.p.v. een cirkelvorm goed jojoën en hoe verhoudt zich de beweging t.o.v. een gewone jojo? Wat gebeurt er als je het pad van de jojo begrenst, bijvoorbeeld door de jojo langs een schuine helling te laten af- en oprollen? Kortom, de ideeën voor profielwerkstukken liggen voor het oprapen.



## Mastercourse

De FNWI, Faculteit der Naturwetenschappen, Wiskunde en Informatica van de de Universiteit van Amsterdam organiseert een Mastercourse voor docenten natuurwetenschappen, wiskunde en informatica. In een van deze cursussen wordt er ook gejojo'ed. Mastercourses zijn eendaagse cursussen in diverse vakgebieden met als doel eerstegraads docenten de gelegenheid te bieden zich op de hoogte te stellen van recente ontwikkelingen in hun vakgebied. Meer informatie vindt op de website

[www.science.uva.nl/mastercourses](http://www.science.uva.nl/mastercourses).  
[mastercourse@science.uva.nl](mailto:mastercourse@science.uva.nl) .

