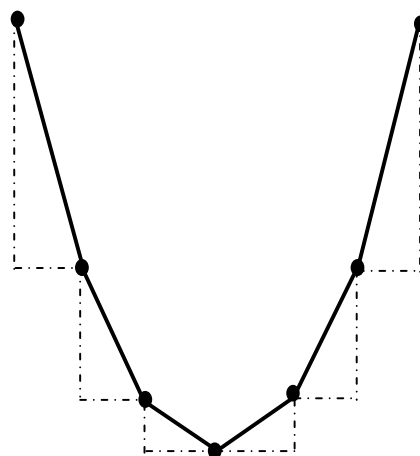
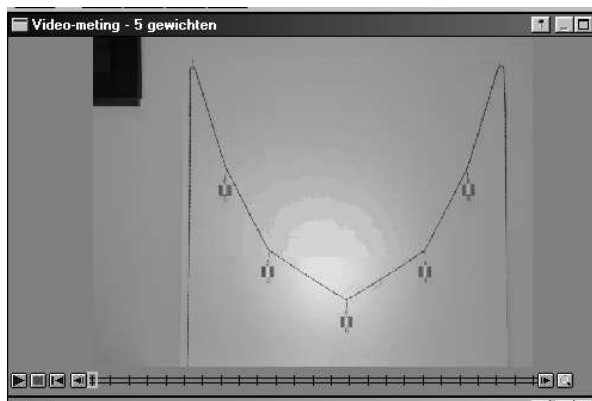


Praktische opdracht: modelleren met Coach

VWO 5 wiskunde B
Mei 2001

Hieronder zie je een ketting waaraan vijf gelijke gewichten hangen.
Daarnaast een schematische tekening van ketting en gewichten. Aan de hand van deze tekening ga je in deze praktische opdracht oefenen met modelleren in Coach.



Inhoudsopgave

Inleiding.....	2
Meten en modelleren.....	2
Het verslag.....	2
Inhoud verslag.....	2
Kennismaken met modelleren.....	3
Eerst wat oefenen.....	4
Modelberekeningen.....	4
Het grafiekenvenster.....	4
Het eerste model.....	5
Waar komt het model vandaan?.....	5
Opdracht 1.....	5
Oefenen zonder directe formule.....	6
Resultaten opslaan.....	6
Resultaten openen.....	6
Opdracht 2.....	6
Opdracht 3.....	7
Opdracht 4.....	7
Opdracht 5.....	7
Bijlage.....	8
Coach installeren.....	8
Wiskundige bewerkingen in Coach.....	8

Inleiding

Deze praktische opdracht is een deel van wat later een grotere praktische opdracht moet worden. Tevens maakt deze opdracht deel uit van een onderzoek naar de bruikbaarheid van Coach bij het vak wiskunde. De opgedane ervaringen zullen ook leiden tot verbeteringen van dit programma.

Metten en modelleren

Je weet waarschijnlijk dat je met behulp van Coach allerlei metingen kunt verrichten. Ook kun je in Coach metingen, die anderen al gedaan hebben, zelf nader onderzoeken. De nieuwste ontwikkeling is dat je nu ook zelf kunt meten aan de hand van videofilmmpjes die iemand anders, of jijzelf, hebt opgenomen.

Een van de mogelijkheden om metingen te verwerken en de resultaten te begrijpen (en daar gaat het natuurlijk om) is: *wiskundig modelleren*. In deze praktische opdracht ga je werken in de *modelleromgeving* van Coach.

Je zult zien dat zo'n model wel lijkt op werken recursieve en directe formules. Ook hebben modellen vaak te maken met differenties, differentiequotienten en differentiëren.

Het verslag

Van het verloop van je onderzoek moet je een verslag maken. Daarin moeten niet alleen de uitkomsten komen te staan, schrijf ook je gedachtegang op. Omdat we benieuwd zijn hoe gemakkelijk of ingewikkeld deze opdracht is en hoe het werken met Coach gaat, zijn we ook nieuwsgierig naar de "fouten" die je onderweg gemaakt hebt. Ook, of juist *van* fouten kun je veel leren. En niemand bereikt zonder zijsprongen zijn/haar doel! Laat dus zien hoe je zo ver bent gekomen, of waarom je niet verder gekomen bent.

Het verslag moet overzichtelijk zijn er netjes uitzien. Dus liefst met een tekstverwerker. Heb je problemen met formules, schrijf die er dan met een pen in. Als je niet handig bent met computertekenen: gewone tekeningen zijn ook goed.

Vanuit Coach kun je tabellen, grafieken en teksten kopiëren en plakken naar een Word document. Het is daarom aan te bevelen om, samen met Coach, ook WORD aan te zetten. Je kunt dan alvast grafieken, tabellen en wat al niet naar WORD kopiëren. Wat je ervan zult gebruiken zie je later wel.

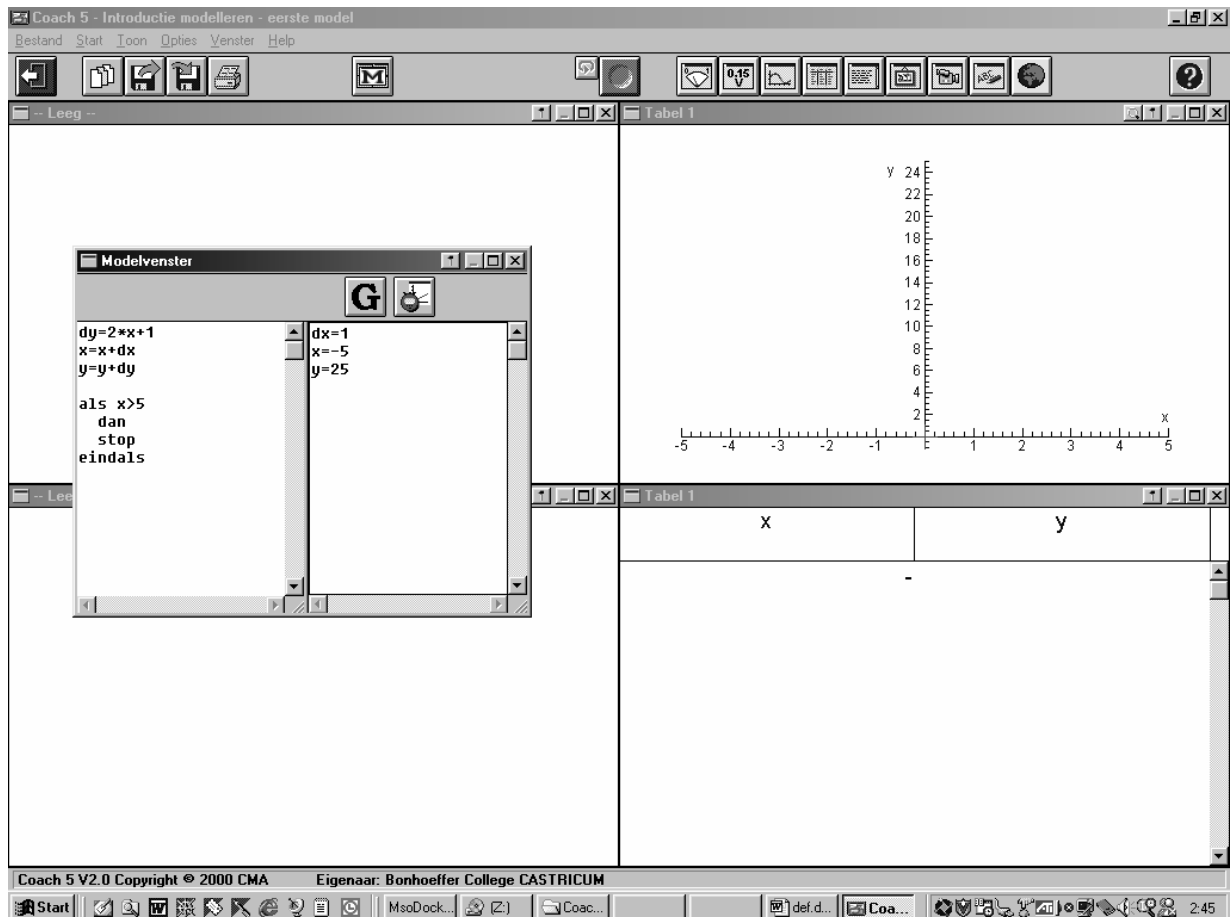
Inhoud verslag

- Inleiding (titel, auteurs, datum, samenvatting, inhoudsopgave, ...)
- Verslag van de verschillende onderdelen van het onderzoek, en wel zo dat de lezer kan zien hoe het onderzoek is verlopen, dus niet alleen het eindresultaat.
Hierbij kan het ook interessant zijn te laten zien hoe sommige dingen *niet* moeten. Misschien ontdek je daarbij wel iets aardigs waar misschien niemand nog aan gedacht heeft of wat leuk zou zijn in een andere opdracht. Of een verbetering aan de opdracht en/of van Coach.
- Conclusie (zo mogelijk)
- Een eendoordeel over de gemaakte opdrachten en over de bruikbaarheid van Coach.
- Een logboek waarin staat hoe lang jullie aan de verschillende onderdelen hebben gewerkt en hoe de werkverdeling was.
- CD-rom en diskette, met daarop zo mogelijk de resultaten en het Word-verslag ook inleveren.

Kennismaken met modelleren

In het programma Coach kun je allerlei *projecten* maken. Een project kan weer uit een of meer *activiteiten* bestaan. Ons project staat op de diskette. Om daar te komen moet je het volgende doen.

- Open van de Coach 5 Thuisversie: Modelleren.
- Klik op de knop: Kies project (tweede van links)
Nu worden alleen de projecten weergegeven die op de CD-rom staan.
Maar we moeten naar de diskette.
- Kies een willekeurig project, bijvoorbeeld 1. Introductie modelleren.
- Klik op de knop: Kies een activiteit (tweede van links)
Je ziet nu de activiteiten van het gekozen project. (Niet de goede dus.)
- Klik in het dialoogvenster op: Bladeren.
- Kies A:
- Kies: eerste model.



Je hebt het bovenstaande scherm gekregen.

Je ziet het modelvenster, een assenstelsel en een lege tabel.

Het modelvenster is verdeeld in twee delen.

Links staat het eigenlijke wiskundige model, rechts staan de beginwaarden.

Je ziet: x begint met -5 , y met 25 . Verder is dx gelijk aan 1 : x neemt toe met stapgrootte 1 .

In het linkerdeel zie je hoe eerst dy berekend wordt en dan de nieuwe x -waarde en y -waarde.

Daarna begint het weer van voor af aan.

Het model wordt doorgerekend totdat $x > 5$.

Eerst wat oefenen

Soms wordt een antwoord gevraagd. Daar moet in je verslag in ieder geval aandacht aan besteed worden.

Modelberekeningen

- Klik op de groene startknop. Deze wordt rood. De werkbalk in het modelvenster verandert: er verschijnt een groene knop plus een schuifbalk.
- Klik op de groene knop.
Het model wordt doorgerekend. Je ziet de grafiek en de tabel verschijnen.
- Schrijf op wat je denkt dat er gebeurt als je $dx = 0,5$ zou nemen.
- Neem $dx = 0,5$ en laat dit doorrekenen. Klopt het resultaat met je voorspelling?
- Je ziet dat de nieuwe grafiek niet in het venster past.
Rechtsklik in het grafiekenvenster. Er verschijnt een menu.
Kies: Automatisch herschalen.
- “Speel” nog wat met verschillende keuzen voor dx , x en y .
Tips:
 1. Je kunt een berekening op elk moment onderbreken door op de rode knop te drukken.
 2. Als je het modelvenster sluit (klik op de M-knop) dan gaat de berekening een stuk sneller. Het modelvenster komt weer terug als je op de M-knop klikt.
 3. Wordt het te vol: rechtsklik in het grafiekenvenster, klik Wis resultaat en Ja.

Het grafiekenvenster

- Bovenin het grafiekenvenster zie je vijf knoppen. Onderzoek de betekenis van die knoppen.
- Rechtsklik in het grafiekenvenster.
Onderzoek de functie van Lees uit en van Weergave.
- Rechtsklik in het grafiekenvenster.
Klik Analyse. Klik Functiefit.
Klik in het vakje bij Functietype.
Probeer de verschillende types, (klik *niet* op OK), met Autofit rekent Coach de best passende grafiek bij het door jou gekozen type. Welke formule past het best bij jouw grafiek?
Klik OK.
- Rechtsklik in het grafiekenvenster en kies Simulatie.
Onderzoek wat je kunt simuleren.
- Klik Verlaat activiteit (linksboven), *niet* bewaren. Zo blijft alles bij het oude.

Er zijn nog meer mogelijkheden binnen Coach. Ook zijn er meestal verschillende wegen naar hetzelfde resultaat te bereiken. Wellicht ontdek je zelf meer: schrijf deze ook op in je verslag.

Het eerste model

Waar komt het model vandaan?

Metingen aan een ketting met gewichten leverde het volgende schematische resultaat.

Zie de figuur hiernaast.

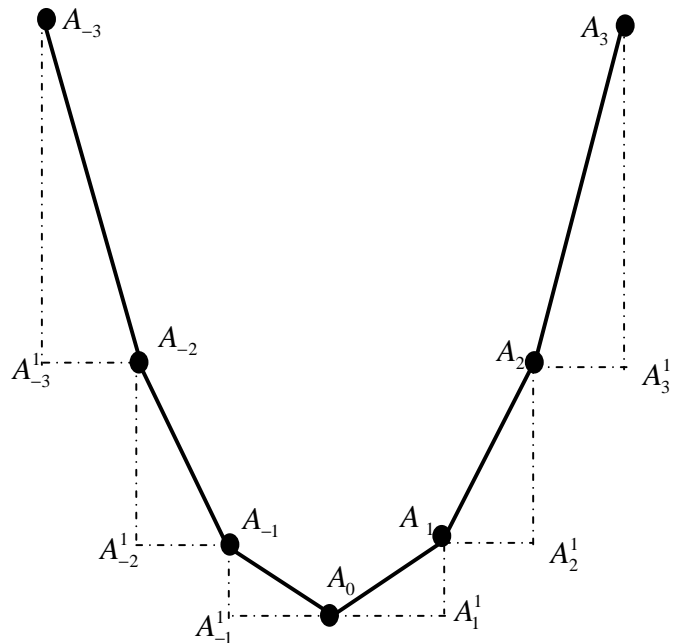
Aan een ketting hingen symmetrisch vijf gelijke gewichten. De beide bovenste punten geven de ophangpunten weer. De andere punten zijn de knikpunten waaraan de gewichten bevestigd zijn.

De horizontale afstand tussen de gewichten was gelijk:

$$A_{-3}^1 A_{-2} = A_{-2}^1 A_{-1} = A_{-1}^1 A_0 = \dots = A_2 A_3^1 .$$

Het bleek dat (bij benadering) de hellingen (= richtingscoëfficiënten) van $A_0 A_1$, $A_1 A_2$ en $A_2 A_3$ zich verhouden als 1 : 3 : 5.

Iets dergelijks geldt ook voor de hellingen aan linkerkant.



Om simpel te beginnen is in het eerste model gekozen voor

$$A_{-3}^1 A_{-2} = A_{-2}^1 A_{-1} = A_{-1}^1 A_0 = \dots = A_2 A_3^1 = 1. \text{ Dan geldt dus } A_0 A_1^1 = 1.$$

Opdracht 1

- Ga na dat het “eerste model” bij het bovenstaande past. Probeer het model te doorgronden, zodat je begrijpt hoe het in elkaar zit.
- Welke verband is er tussen x en y ? (Geef de formule)
Kun je deze formule bewijzen uit het model?

Aanwijzing 1: gebruik een somformule voor een rekenkundige rij.

Aanwijzing 2: bereken het verschil tussen de kwadraten van $n+1$ en n .

Aanwijzing 3: in onderstaande figuur zie je dat $1^2 + 3 = 2^2$.

Toon met een dergelijke figuur aan dat $2^2 + 5 = 3^2$.

Toon met een dergelijke figuur aan dat voor elke n geldt

$$n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$



Oefenen zonder directe formule

Je hebt gezien dat er in dit geval een eenvoudige formule is die direct het verband geeft tussen x en y , namelijk $y = x^2$. Daarmee kun je het model een heel stuk gemakkelijker maken.

Maar dikwijls is het helemaal niet zo eenvoudig of zelfs onmogelijk om zo'n directe formule te vinden. Vaak is het al moeilijk genoeg om erachter te komen hoe je van bijvoorbeeld van $x = 5$ naar $x = 6$ gaat, of hoe je tussenliggende waarden zou moeten berekenen.

Daarom is het de bedoeling dat je bij de volgende opgaven *in het model* geen directe formules als $y = x^2$ gebruikt. Je mag ze wel gebruiken om regelmatigigheden op te sporen of deze te bewijzen. Het is per slot van rekening oefenen.

Resultaten opslaan

Bij de volgende opdrachten kun je steeds uitgaan van het eerste model. Dat moet je gaan aanpassen. Als je klaar bent, of de volgende keer verder wilt gaan, of een tussenresultaat op de diskette wilt bewaren dan gaat dat als volgt.

- Klik in de bovenste werkbalk op de knop: Bewaar resultaat als (vierde knop van links).
- Geef een beschrijving, bijvoorbeeld Model 2. (Het eerste model blijft dan bestaan.)
- Via bladeren naar A:
- Klik OK

Bewaar van elke opdracht het Coach-resultaat op de diskette.

Resultaten openen

De volgende keer open je het resultaat op de volgende manier.

- Start Coach en kies een willekeurig project als je helemaal opnieuw begint.
- Klik op de knop: Open resultaat (derde knop van links in de werkbalk).
- Ga via bladeren naar A:
- Kies het resultaat dat je wenst.

Opdracht 2

Pas het model zo aan dat dezelfde grafiek wordt getekend, maar met een kleinere waarde voor dx : een model voor een ketting met meer gewichten. *In het model mag je de formule $y = x^2$ dus niet gebruiken.*

Het ligt hierbij voor de hand om eerst te onderzoeken of je, ook met kleinere stappen dan $dx = 1$, te maken hebt met de verhouding $1 : 3 : 5 : \dots$. Want dat ligt eigenlijk wel voor de hand.

Aanwijzing 1: gebruik de GR (of Coach als je daar in thuis bent) om de functie $f(x) = x^2$ te onderzoeken.

Aanwijzing 2: zoek op een meetkundigemanier zoals bij opdracht 1, aanwijzing 3.

Als je door proberen een resultaat gevonden hebt, probeer dan ook aan te tonen dat het geen toevallig verband is maar "bewijs" dat het klopt, net als je bij opdracht 1 gedaan hebt. Dan wordt het wiskunde!

Schrijf in het verslag op hoe je te werk bent gegaan.

Opdracht 3

Maak een model voor het geval de ophangpunten de punten $(0, 10)$ en $(10, 10)$ zijn en het laagste punt van de ketting punt $(5, 5)$.

Zorg ervoor dat het model bij verschillende stapgroottes dezelfde grafiek oplevert.

Geef ook de formule van de grafiek.

Schrijf in het verslag weer op hoe je te werk bent gegaan.

Opdracht 4

- Bereken met je rekenmachine de totale lengte van de ketting van het eerste model.
- Pas het eerste model aan, zodat het model de lengte uitrekent.
Noem de lengte L en de toename dL .
De grootte L kun je in het diagram of de tabel plaatsen via de Wijzig/maak ... menu-optie.
Kijk bij C1 en C2 hoe de x en de y daarin staan. Voeg bij C3 op dezelfde manier L toe.
- Laat de lengte van de ketting ook berekenen in het model van opdracht 2.
Voor bijvoorbeeld $dx = 0,1$ krijg je een goede benadering voor de booglengte van een deel van een parabool.

Opdracht 5

In deze opdracht dagen we je uit om een wiskundig model te maken van een ketting die onder zijn eigen gewicht hangt. Dit kun je doen door de situatie zoals getekend op bladzijde 5 te onderzoeken voor het geval $A_{-3}A_{-2} = A_{-2}A_{-1} = A_{-1}A_0 = \dots = A_2A_3 = 1$. Nu zijn de "horizontale" afstanden niet meer gelijk!

De verhoudingen van de hellingen blijft hetzelfde.

- Neem $A_1^1A_1 = 0,5$ en bereken de coördinaten van A_{-3} tot en met A_3 .
- Maak een "eerste model" hierbij.
- Maak een model voor $\dots = A_{-3}A_{-2} = A_{-2}A_{-1} = A_{-1}A_0 = \dots = A_2A_3 = \dots = 0,1$.
- Leg uit waarom het door jou onderzochte tabel te maken heeft met een ketting die onder zijn eigen gewicht hangt.

Bijlage

Coach installeren

- Plaats CD in de Cdrom-drive
- Zoek de CD op, bijvoorbeeld via Mijn Computer.
- Dubbelklik de CD open.
- Dubbelklik C5Start.exe
Het installatieprogramma wordt geopend.
- Kies Nederlands
- Kies Voortgezet onderwijs
- Kies Thuisversie
- Kies Coach 5
- Kies Coach 5 compleet
- Volgende
- Volgende
- Wachten tot gevraagd wordt naar naam en codenummer. Vul naam en codenummer precies in zoals hieronder geschreven.
Het vijfde teken van het codenummer is het cijfer 1 en niet de kleine letter L.

Naam: Bonhoeffer College CASTRICUM

Codenummer: ht2k1ddcfjeke

- Wanneer het scherm van het installatieprogramma weer verschijnt:
terug, terug, terug en exit.

In het programmamenu (bij Start) staat nu Coach 5 Thuisversie.

Je ziet daar ook dat je, als je dat wilt, de installatie weer ongedaan kunt maken.

Voor deze praktische opdracht heb je Modelleren nodig.

Wiskundige bewerkingen in Coach.

Bij hoeken rekt Coach met radialen. Dus hoeken in graden moet je (laten) omrekenen naar radialen.

Wat wil je	Hoe doe je dat in Coach	Wat wil je	Hoe doe je dat in Coach
optellen	5+2	$\sin(20^\circ)$	$\sin(20/\pi)$
aftrekken	5-2	$\cos(20^\circ)$	$\cos(20/\pi)$
vermenigvuldigen	5*2	$\tan(20^\circ)$	$\tan(20/\pi)$
delen	5/2	$\sin^{-1}(0,5)$	$\arcsin(0,5)$
machtsverheffen	5^2	$\cos^{-1}(0,5)$	$\arccos(0,5)$
$\sqrt{2}$	sqrt(2)	$\tan^{-1}(0,5)$	$\arctan(0,5)$
π	pi		