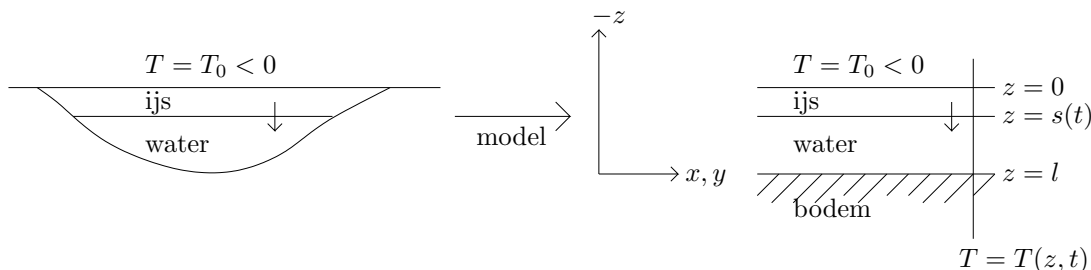


Stefan problemen voor het bevroren van water

Als stilstaand water van een bepaalde constante temperatuur $T_m > 0$ in een meer plotseling (zeg op tijdstip $t = 0$) wordt blootgesteld aan vriescondities boven het wateroppervlak (dus $T_0 < 0$ in graden Celsius aan het wateroppervlak), spreken we in warmtevergelijkingstermen van een *Stefan probleem*.

Vragen die je bij dit probleem kunt stellen zijn o.a. “Hoe snel groeit de ijslaag die op het water ontstaat? Zal al het water uiteindelijk bevroren? Zo ja, hoeveel tijd kost dat?”



a) Beredeneer dat, als het meer groot genoeg is, en het bodemprofiel vrij vlak, het redelijk is om aan te nemen dat de temperatuur in het water alleen zal afhangen van de verticale coördinaat, ofwel van de afstand tot het oppervlak. Zie het plaatje. Dit betekent dat je aanneemt dat het proces homogeen is in de horizontale x, y -coördinaten (en daaraan is voldaan als je aanneemt dat x, y onbegrensd zijn).

Zodra $T < 0$ verwacht je dat het water zal bevriezen. Dit betekent dat er voor $t > 0$ een bovenste laag van het meer, met $0 < z < s(t)$, bevroren zal zijn, terwijl het onderste deel van het meer, met $s(t) < z < l$ nog niet bevroren is. Beredeneer dat de notatie $s = s(t)$ voor de rand tussen deze delen nodig is, ofwel, dat te verwachten valt dat deze rand beweegt in de tijd. Zo'n rand heet een zogenaamde *vrije rand*, en het Stefan probleem is een *vrije rand probleem* waarbij een onderdeel van het probleem is om de vrije rand te bepalen.

b) Stel warmtevergelijkingen op voor de twee afzonderlijke gebieden met ijs en water, waarbij je er aanvankelijk vanuit gaat dat ijs en water verschillende warmtediffusieconstanten K_i en K_w hebben.

Een belangrijk onderdeel van het probleem zijn de bijbehorende randvoorwaarden op $z = 0$, $z = s$ en $z = l$. Bepaal de voorwaarden op $z = 0$ en $z = s$ die volgen uit het plaatje. (Wat is de temperatuur op de rand tussen ijs en water, *i.e.*, de bevroeringstemperatuur?) Als je ervan uitgaat dat de bodem isolerend is, betekent dat dat het water geen warmte kan afgeven aan of ontvangen uit de bodem. Wat is de bijbehorende randvoorwaarde?

Nog een benodigd onderdeel om een goed gesteld probleem te krijgen is een beginvoorwaarde op tijdstip $t = 0$. Stel deze op, uitgaande van het gegeven dat de watertemperatuur in het meer tot $t = 0$ wordt gegeven door $T = T_m > 0$ en dat al het water tot tijdstip $t = 0$ dus nog niet bevroren is.

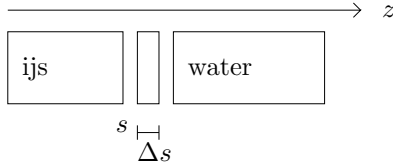
c) Beredeneer dat het probleem nu voor een vaste rand s wel goed gesteld is, maar dat dat met de vrije rand $s = s(t)$ (die onbekend is) niet het geval is.

Het bevroeringsproces dat plaatsvindt bij $z = s$ kan gelukkig een extra vergelijking leveren, omdat er bij bevroren een energie-uitwisseling plaatsvindt. Dat dit wel nodig is, kun je op verschillende manieren beredeneren. Probeer een uitleg te vinden, uitgaande van het feit dat een mengsel van water en ijs 0°C is, ongeacht de hoeveelheden ijs en water, en/of uitgaande van het feit dat moleculen in water meer bewegen dan in ijs.

Bovenstaande heeft te maken met de zogenaamde *latente warmte* L per massa-eenheid van water, die uit het water wordt 'verwijderd' bij bevrozing. De netto warmteverandering in het water bij bevrozing blijkt gelijk te zijn aan een sprong die de *warmteflux* $J = -k\nabla T = -k\frac{\partial T}{\partial z}$ (met k de warmtegeleidingscoëfficiënt) in $z = s$ maakt. Schrijf deze sprong als

$$\left[-k\frac{\partial T}{\partial z}\right]_+^- := -k\left(\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z\uparrow s} - \frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z\downarrow s}\right)$$

en bereken met de net gevonden uitleg dat moet gelden $\left[-k\frac{\partial T}{\partial z}\right]_+^- < 0$.



Met bovenstaande definitie van de latente warmte L is de hoeveelheid warmte in een 'volume' Δs gelijk aan $\rho L \Delta s$, waarbij ρ de massadichtheid van water is. Als de grens $s(t)$ dus in een tijdsinterval Δt met verschuift zodanig dat een hoeveelheid Δs aan water wordt omgezet in ijs (zie plaatje), betekent dit dat de (positieve) hoeveelheid warmte die wordt *verwijderd* gedurende Δt tijd enerzijds gelijk is aan $\left[k\frac{\partial T}{\partial z}\right]_+^- \Delta t$, en anderzijds aan $\rho L \Delta s$. Welke differentiaalvergelijking voor $s(t)$ levert dit in de limiet waarin $\Delta t, \Delta s \rightarrow 0$?

d) Onder de vereenvoudigende aanname dat $K_i = K_w = K$ kunnen de vergelijkingen in dimensievrije vorm worden geschreven. Hiervoor schaal je T met een typische temperatuur, z met een typische lengte en t met een typische tijd in het systeem. Vind geschikte schalingsfactoren α, β en γ die via schalingen

$$T = \alpha \tilde{T}, \quad z = \beta \tilde{z}, \quad t = \gamma \tilde{t}$$

en de bijbehorende schaling $s = \beta \tilde{s}$ het volgende resulterende stelsel vergelijkingen geven:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} &= \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2} && \text{voor } 0 < \tilde{z} < \tilde{s}(\tilde{t}) \text{ en } \tilde{s}(\tilde{t}) < \tilde{z} < 1 \\ \tilde{T} &= -1 && \text{in } \tilde{z} = 0 \\ \tilde{T} &= 0 && \text{in } \tilde{z} = \tilde{s}(\tilde{t}) \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} &= 0 && \text{in } \tilde{z} = 1 \end{aligned}$$

Hiermee wordt de vergelijking voor \tilde{s} gelijk aan

$$S \frac{d\tilde{s}}{d\tilde{t}} = \left[\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}}\right]_+^-$$

met $S = \frac{\rho K L}{k|T_0|}$ het *Stefan getal*. Laat zien dat de bijbehorende beginvoorwaarden op $\tilde{t} = 0$ gegeven worden door $\tilde{T} = \theta := \frac{T_l}{|T_0|}$ en $\tilde{s} = 0$.

e) In het algemeen is dit probleem moeilijk op te lossen, maar in de limieten (i) $S \gg 1$ ($\frac{1}{S} \ll 1$) en (ii) $S \ll 1$ kun je asymptotische analyse toepassen. Laat in het vervolg de tildes weg.

(i) Stel $\varepsilon = \frac{1}{S}$ zodat $\frac{ds}{dt} = \mathcal{O}(\varepsilon)$, ofwel, zodat je te maken hebt met een langzaam bevrozingsproces. Wat betekent dit in leidende orde $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ voor de rand s ? Los het resulterende leidende orde probleem voor T in water en in ijs op. Laat zien dat de resultaten voor T in ijs en in water tot de sprongconditie

$$\left[\frac{\partial T}{\partial z}\right]_+^- = \frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{\text{ijs}} - \frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{\text{water}} \approx \frac{1}{s} - 0$$

leidt, zodat de differentiaalvergelijking voor s benaderd kan worden door

$$S \frac{ds}{dt} \approx \frac{1}{s}.$$

Los deze differentiaalvergelijking op door gebruik te maken van de beginvoorwaarde op s . Leg uit wat je wiskundige resultaten betekenen voor het bevroeringsproces.

(ii) Stel $\varepsilon = S$ en leidt uit de vergelijking voor s af dat dit in leidende orde voor de sprong $\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}\right]_+$ betekent dat deze nul moet zijn. Dit betekent vervolgens, dat je de twee problemen in de gebieden met ijs en met water in één keer kunt oplossen voor $0 < z < 1$. Dit kan m.b.v. scheiden van variabelen, waarmee je door de randvoorwaarden op te leggen eigenfuncties vindt, en vervolgens door de beginvoorwaarde $T(t = 0) = \theta$ op te leggen de oplossing vindt. Laat zien dat dit leidt tot

$$T(z, t) = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4} t} \sin \frac{1}{2}(2n+1)\pi z$$

met

$$a_n = \frac{4(1+\theta)}{(2n+1)\pi}$$

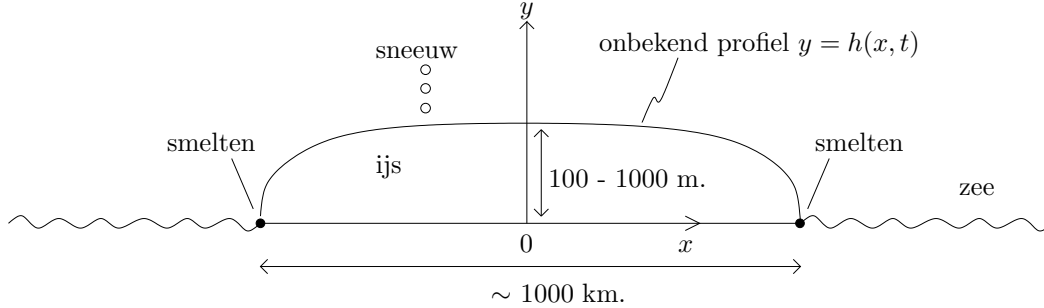
Herinner dat $s = s(t)$ in feite bepaald wordt door de positie van $T = 0$ op tijdstip t en leidt hiermee af waaraan s moet voldoen. Geef vervolgens een impliciete formule voor het tijdstip t^* waarop al het water bevroren is, *i.e.*, waarvoor geldt dat $T(t = t^*, z = 1) = 0$. Laat zien dat dit tijdstip t^* benaderd kan worden door

$$t^* \approx \frac{4}{\pi^2} \log \left(\frac{4(1+\theta)}{\pi} \right)$$

Leg in je eigen woorden uit wat de wiskundige resultaten betekenen voor het bevroeringsproces.

Dynamica van ijslagen

Op een lange tijdschaal gedragen ijslagen zich als langzaam bewegende viskeuze vloeistoffen; ze zijn een voorbeeld van vaste stoffen die onder hun eigen gewicht vervormen als gevolg van de zwaartekracht. Op eilanden in de poolgebieden, zoals Antarctica, Groenland en de Canadese eilanden, betekent dit dat de ijslagen op het land langzaam richting de kust bewegen, waar ze uiteindelijk in het water zullen smelten. Tegelijkertijd zorgt sneeuwval ervoor dat de ijslagen ook van boven aangroeien. Zie onderstaand plaatje voor een schets in wiskundige termen, met wat typische lengteschalen voor dergelijke ijslagen.



De vraag die in deze opgave centraal staat is, of er een evenwichtsprofiel h mogelijk is, waarbij er onder aanname van een constante hoeveelheid sneeuw per jaar dus evenwicht is tussen de groei- en smeltprocessen.

a) Voor een viskeuze vloeistof ligt het voor de hand om de Navier-Stokes vergelijkingen te gebruiken. Deze zijn in standaardvorm, zonder aanwezigheid van extra krachten,

$$\begin{aligned}\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} &= -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{u} \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0\end{aligned}\quad (1)$$

Beschouw het probleem als een 2D probleem en voeg de zwaartekracht toe in de vorm van een term $-\rho g(0, 1)^\top$ in de eerste vergelijking. (Waarom ligt deze term voor de hand?) Schrijf de vergelijkingen expliciet uit in 2 dimensies, *i.e.*, voor $\vec{x} = (x, y)$, $\vec{u} = (u, v)$.

b) Om in te zien welke termen in de drie vergelijkingen van belang zijn en welke minder belangrijk zijn voor de dynamica, zijn de lengte- en tijdschalen en de eigenschappen van het ijs van belang. IJs heeft een dichtheid $\rho \sim 10^3 \text{ kg/m}^3$ en een viscositeitscoëfficiënt $\mu \sim 10^6 \text{ N jaar/m}^2$. De horizontale lengte is typisch van de orde $L \sim 10^6 \text{ m}$, de horizontale snelheid van de orde $U \sim 10^2 \text{ m/jaar}$. De typische hoogte is van de orde 10^2 tot 10^3 m , en is daarmee dus veel kleiner dan de typische breedte. Hetzelfde geldt voor de verticale snelheid. Introduceer dus nieuwe geschaalde verticale variabelen \tilde{y} en \tilde{v} die voldoen aan $y = \varepsilon \tilde{y}$ en $v = \varepsilon \tilde{v}$ met $0 < \varepsilon \ll 1$ (in de praktijk $\varepsilon \sim 10^{-3}$). Schaal ook het profiel h mee met y . Herschrijf de vergelijkingen uit (a) in termen van de nieuwe variabelen.

c) Eén van de vergelijkingen is nu, onder aanname dat $\varepsilon^2 \text{Re} \ll 1$, in leidende orde van de vorm $\frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}} u_{\tilde{y}\tilde{y}} = 0$. Het fysische idee is echter, dat verticale veranderingen in u in balans moeten zijn met de druk. Daarom moet p wel van gelijke orde zijn als $u_{\tilde{y}\tilde{y}}$. Herschaal p met behulp van een geschikte schalingsfactor tot \tilde{p} om dit voor elkaar te krijgen. Vermenigvuldig vervolgens twee van de drie vergelijkingen met $\varepsilon^2 \text{Re}$ om overall termen van $\mathcal{O}(1)$ als leidende orde termen te krijgen. Onder dezelfde aanname als net ($\varepsilon^2 \text{Re} \ll 1$) blijven er nu in iedere vergelijking twee termen van $\mathcal{O}(1)$ of van nog onbekende orde over als (mogelijke) leidende orde termen. Welke term is van onbekende orde?

d) Leidt uit de gegeven waarden voor μ en ρ en de benadering $g = 10 \text{ m/s}^2$ af dat de gemaakte aanname over het Reynoldsgetal terecht is, en dat de term van onbekende orde in feite van $\mathcal{O}(1)$

is omdat $\rho g \text{Re} \sim 10^9 \text{ kg}/(\text{m}^2 \text{jaar}^2)$. (Gebruik hierbij de definitie van 1 Newton: $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$.) Overtuig jezelf dat deze constante term exact op 1 geschaald kan worden door de vergelijkingen dimensieloos te maken. Doe dit (of neem simpelweg $\varepsilon^3 \rho g \text{Re} = 1$ als het niet lukt).

De resulterende vergelijkingen zijn nu, met de tildes weggelaten:

$$\begin{cases} u_x + v_y = 0 \\ -p_x + u_{yy} = 0 + \text{h.o.t} \\ -p_y - 1 = 0 + \text{h.o.t} \end{cases}$$

e) Om de vergelijkingen op te lossen zijn voldoende randvoorwaarden nodig. Vanwege wrijving tussen ijs en land ligt het voor de hand om op $y = 0$ standaardrandvoorwaarden op u en v op te leggen. Doe dit.

Op $y = h$ (met de herschaalde h) is u a priori niet gelijk aan nul. Maar omdat er alleen verwaarloosbare schuifspanningen optreden tussen ijs en lucht is het wel logisch om $u_y = 0$ op te leggen op $y = h$.

Er is nog een voorwaarde op $y = h$ nodig, die kan worden afgeleid door een deeltje in het ijs of op het ijs te beschouwen gedurende het (langzame) stromingsproces. Beredeneer dat, als er geen sneeuw op het ijs valt, een deeltje op het ijsoppervlak altijd op dat oppervlak blijft en daar meestroomt met het ijs. Dit betekent dat de afstand $|h - y|$ gelijk blijft aan $|h - y| = 0$ op $y = h$, en dat *in afwezigheid van sneeuw* de *kinematische randvoorwaarde*

$$\frac{D}{Dt}[h(x, t) - y] = 0 \text{ op } y = h$$

kan worden opgelegd. Leg uit waarom hier de zogenaamde Lagrangiaanse of materiaalafgeleide moet worden gebruikt, en niet slechts $\frac{\partial}{\partial t}$. Als er wel sneeuw valt, beweegt het zojuist beschouwde deeltje nog steeds met de stroming mee, maar zal het oppervlak $h(x, t)$ (relatief) hoger worden gedurende de tijd. Leg uit dat de net geformuleerde randvoorwaarde daarom moet veranderen in

$$\frac{D}{Dt}[h(x, t) - y] = \text{const. op } y = h$$

als de hoeveelheid gevallen sneeuw per jaar constant wordt aangenomen. Neem ook voor deze constante de waarde 1 aan (ook hier kan dat netjes m.b.v. schaling) en schrijf de resulterende kinematische randvoorwaarde voor de vrije rand $y = h(x, t)$ uit.

Leg uit dat er geen randvoorwaarde voor v op $y = h$ nodig is. Wel is er ergens een keuze voor de waarde van p nodig: kies als ijkking in $y = h$ dat de standaard luchtdruk (1 atm.) correspondeert met $p = 0$. Leg verder op dat $h(x_{\pm}, t) = 0$. Met wat voor aanname correspondeert dit?

f) Los de vergelijkingen voor $p(x, y, t)$, $u(x, y, t)$ in deze volgorde (deels) op, door herhaaldelijk naar y te integreren en randvoorwaarden te gebruiken. Integreer met de gevonden uitdrukking voor u de vergelijking $u_x + v_y = 0$ wederom naar y tussen de randen $y = 0$ en $y = h$. Laat zien dat

$$v(h) = h_t + u h_x - 1.$$

en leidt daarmee de vergelijking

$$h_t + \int_0^h u_x dy + u h_x = 1$$

af. Neem hierin vervolgens twee termen aan de linkerkant samen om de vergelijking te vereenvoudigen. Met behulp van de al eerder gevonden uitdrukking voor u vind je uiteindelijk een niet-lineaire PDV voor het profiel $h(x, t)$:

$$h_t = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{3} h^3 h_x \right] + 1.$$

g) Voor het gezochte evenwichtsprofiel moet gelden dat $h = h(x)$ onafhankelijk van t . De PDV wordt dan een gewone differentiaalvergelijking voor h . Los deze op, en leg daarbij op dat h

symmetrisch (even) is in x (dus ook $x_+ = -x_-$). De laatste integratieconstante kun je bepalen door op te leggen dat $h(x_+) = h(x_-) = 0$.

Hoe ziet de functie $h(x)$ eruit rond de randen waar de ijskap het water raakt? Vind je dit realistisch? Waarom wel/niet?

Een belangrijke vervolgvraag, die je niet hoeft uit te werken, is of dit profiel ook *stabiel* is onder kleine verstoringen in tijd of plaats. Blijft het bijvoorbeeld bestaan als er lokaal of tijdelijk wat meer of minder sneeuw valt? M.b.v. lineaire stabiliteitsanalyse kun je laten zien dat het antwoord hierop JA is.

Dichtheidsverschillen van water in oceanen

Het water in een oceaan is onderhevig aan grote oceaanstromingen die o.a. te maken hebben met rotatie van de aarde en temperatuurs- en dichtheidsverschillen tussen verschillende 'lagen' in de oceaan. Deze opgave gaat over de dichtheid, die varieert met de diepte van het water en die de oceaan een gelaagde (Engels: stratified) structuur geeft. Het lijkt natuurlijk om te verwachten dat de dichtheid onder invloed van de zwaartekracht in diepere lagen groter is dan in hogere lagen. In deze opgave bekijken we of dit inderdaad zo is.

Op oceaanschalen speelt de viscositeit geen belangrijke rol, dus als er geen externe kracht is, kan het gedrag van het water worden beschreven door de vergelijkingen

$$\begin{cases} \rho(\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}) &= -\nabla p \\ \rho_t + \nabla \cdot (\rho\vec{u}) &= 0 \end{cases} \quad (2)$$

die in feite de wet van behoud van impuls en de wet van behoud van massa zijn. In diepe oceanen speelt de zwaartekracht een rol. Voeg deze daarom toe in de vorm van een (geschaalde, met $g = 1$) term $\rho\vec{k}$ met \vec{k} een naar beneden gerichte eenheidsvector.

a) In de praktijk zijn de dichtheidsverschillen voornamelijk het gevolg van temperatuursverschillen, en ontstaan ze niet zozeer doordat het water door de zwaartekracht wordt 'samengedrukt'. Hoe hangt de dichtheid van water af van de temperatuur?

Neem in het vervolg aan dat het water niet-samendrukbaar (Engels: incompressible) is, ofwel dat alle energie bestaat uit kinetische energie, ofwel dat

$$\frac{D}{Dt}\rho = 0. \quad (3)$$

Beredeneer waarom dit voor een gelaagde vloeistof niet meteen gesimplificeerd kan (en ook niet hoeft vanwege de fysica) worden tot $\rho \equiv \rho_0$. Combineer vervolgens (2), de zwaartekracht en (3) tot de *Euler vergelijkingen voor een gelaagde vloeistof*:

$$\begin{cases} \rho(\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}) &= -\nabla p + \rho\vec{k} \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \\ \rho_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\rho &= 0 \end{cases} \quad (4)$$

b) Beredeneer dat het redelijk is om op grote schaal aan te nemen dat het bodemprofiel en het oceaanoppervlak vlak zijn en dat de processen a priori in de horizontale coördinaten hetzelfde zijn.

In het vervolg zullen we daarom een gelaagde stroming tussen twee horizontale platen bekijken, en een versimpeld twee-dimensionaal systeem beschouwen. Schrijf $\vec{x} = (x, y)$, $\vec{u} = (u, v)$ en bekijk de vergelijkingen (4) voor $(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, 1)$, *i.e.*, schaal de diepte op 1. Neem $\vec{k} = (0, -1)$. Er zijn randvoorwaarden nodig op $y = 0$ en $y = 1$. Wat zijn de meest voor de hand liggende randvoorwaarden op v ? Leg deze op.

c) We willen de gelaagdheid in rust beschouwen. Neem dus $\vec{u} \equiv 0$ en laat zien dat (4) reduceert tot

$$p_x = 0, \quad p_z = -\rho, \quad \rho_t = 0 \quad (5)$$

voor de onbekende druk p en dichtheid ρ . Laat zien dat (5) impliceert dat $p = p(y)$, $\rho = \rho(y)$ en dat

$$\vec{u} \equiv 0, \quad \rho(y) = S(y), \quad p(y) = -\int_0^y S(\eta) d\eta \quad (6)$$

voor een willekeurige, gladde functie $S(y)$ een oplossing is van (4) met de randvoorwaarden uit (b).

De conclusie is dus, dat de dichtheid in rust een hele algemene structuur mag hebben; de enige voorwaarde is dat hij slechts mag variëren in de verticale richting. De vraag is nu, of iedere $\rho = S(y)$ een *realistische* oplossing is. Als $S(y)$ bijvoorbeeld een stijgende functie is, betekent

dit dat er ‘zwaar’ water bovenop ‘licht’ water ligt, waardoor er waarschijnlijk een stroming onder invloed van de zwaartekracht zou ontstaan. Met andere woorden, van zo’n oplossing verwachten we dat hij *instabiel* is.

d) We bestuderen nu de stabiliteit van de (fundamentele) oplossing (6) door hem te verstoren. Introduceer daartoe $0 < \varepsilon \ll 1$ en schrijf

$$\begin{aligned}\vec{u}(x, y, t) &= \varepsilon(\tilde{u}(x, y, t), \tilde{v}(x, y, t)) \\ \rho(x, y, t) &= S(y) + \varepsilon\tilde{\rho}(x, y, t) \\ p(x, y, t) &= -\int_0^y S(\eta)d\eta + \varepsilon\tilde{p}(x, y, t)\end{aligned}$$

Substitueer dit in (4) en lineariseer, *i.e.*, negeer alle termen van $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ en kleiner. Laat zien dat dit leidt tot de vergelijkingen

$$\begin{cases} S\tilde{u}_t = -\tilde{p}_x \\ S\tilde{v}_t = -\tilde{p}_y - \tilde{\rho} \\ \tilde{u}_x + \tilde{v}_y = 0 \\ \tilde{\rho}_t + \frac{dS}{dy}\tilde{v} = 0 \end{cases}$$

Wat zijn de randvoorwaarden?

De lineaire stabiliteitsanalyse kan gedaan worden met een ‘normal modes’ methode. Neem daarvoor de volgende structuur voor $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\rho}, \tilde{p})$:

$$(\tilde{u}(x, y, t), \tilde{v}(x, y, t), \tilde{\rho}(x, y, t), \tilde{p}(x, y, t)) = (U(y), V(y), R(y), P(y))e^{ikx + \omega t}$$

voor $k \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{C}$.

e) Leidt de vergelijkingen voor U , V , R en P af, laat zien dat U , R en P in V uitgedrukt kunnen worden en leidt de volgende vergelijking af voor $V(y)$:

$$\frac{d}{dy} \left(S \frac{dV}{dy} \right) + k^2 \left(\frac{1}{\omega^2} \frac{dS}{dy} - S \right) V = 0 \quad (7)$$

met randvoorwaarden $V(0) = V(1) = 0$. Hierin speelt $\omega = \omega(k^2)$ de rol van eigenwaarde.

f) Als voorbeeld bekijken we een profiel $S(y) = e^{ay}$ voor een waarde $a \in \mathbb{R}$. Welke waarden van a corresponderen met een intuïtief instabiel profiel? Laat zien dat (7) vereenvoudigt tot de expliciet oplosbare vergelijking

$$\frac{d^2V}{dy^2} + a \frac{dV}{dy} + k^2 \left(\frac{a}{\omega^2} - 1 \right) V = 0$$

en bepaal de eigenwaarden $\omega_j = \omega_j(k^2; a)$, $j = 1, 2, \dots$

Leg uit waarom hieruit volgt dat de oplossing (6) van (4) instabiel is als $a > 0$. Geef een schets van de stroming die wordt geïnduceerd door de instabiele eigenfuncties voor $a > 0$, *i.e.*, bepaal $(U_j(y), V_j(y), R_j(y), P_j(y))$ en schets

$$\vec{u}_j(x, y, t) = \varepsilon(U_j(y), V_j(y))e^{ikx + \omega_j(k^2)t}$$

voor $j = 1$ en $j = 2$ als functie van x en y voor zekere vaste waarden van t , k en ε .

g) Keer terug naar algemene profielen $S(y)$. Laat zien dat er voor iedere $S(y)$ met $\frac{dS}{dy} > 0$ voor alle $y \in (0, 1)$ instabiele eigenwaarden ω_j bestaan. Wat is dus je conclusie voor de dichtheidsprofielen in gelaagde vloeistoffen?