MODELBOUW week 9
13 november 2007

Opgave 1

i) Beschouw de Navier-Stokes vergelijkingen in twee dimensies voor een stroming $\vec{u}(\vec{x},t) = u(x,y,t), v(x,y,t))$ met vorticiteit

$$\omega(x,y,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u(x,y,t) \\ v(x,y,t) \end{pmatrix}.$$

(Dit is de definitie van vorticiteit.) Laat zien dat

$$\frac{D}{Dt}\,\omega = \nu\Delta\omega$$

(met $\frac{D}{Dt}$ de 'materiaal-' of 'Langrangiaanse' afgeleide).
Hint: gebruik de continuïteitsvergelijking.

ii) Beschouw een gegeven (gladde) stroming van een *incompressibele* vloeistof in een twee-dimensionaal domein Ω (met randvoorwaarden), waarvoor $\omega(x,y,0) \neq 0$ op $t = 0$ in een punt $(x,y) \in \Omega$. Beredeneer waarom deze stroming nooit in rust zal komen als de vloeistof niet-viskeus is. Wat verwacht je van een viskeuze vloeistof?

Opgave 2

Bij de afleiding van de Navier-Stokes vergelijkingen wordt de identiteit

$$\mathrm{div}((\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^t) \cdot \vec{e}) = (\Delta\vec{u} + \nabla(\mathrm{div}\vec{u})) \cdot \vec{e}$$

gebruikt. Laat zien dat deze identiteit waar is in 2D, *i.e.*, voor vectoren $\vec{u} = (u,v)$, $\vec{x} = (x,y)$ en $\vec{e} = (e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$.