

Lijst van gewenste wiskunde-onderwerpen als basis voor een universitaire studie economie en/of bedrijfskunde.

BASIS -WISKUNDE (met name: Algebra)

Gehele getallen, rationale getallen en reële getallen.

Gehele exponenten:

$$a^n = a \times a \times \dots \times a \quad (n \text{ factoren})$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{en} \quad a^0 = 1$$

Gebroken exponent:  $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$  ( $a > 0$ )

Regels voor exponenten:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(ab)^n = a^n b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Toelichting: studenten moeten de volgende soorten vaardigheden bezitten:

Vereenvoudig:  $\frac{x^4 y^{-3}}{(x^2 y^{-3})^2}$ ,  $\frac{y^2 \cdot \sqrt[3]{x^4}}{x^2 y^{-1} \cdot \sqrt[3]{x}}$ ,  $\left(\frac{1}{3^{-2}}\right)^{-2}$

Algebra-regels:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$a(b + c) = (b + c)a = ab + ac$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Toelichting: werk uit:  $(2x - 7y)^2$ ,  $\left(x + \frac{2}{x}\right)^2$

Haakjes wegwerken en gelijksoortige termen bij elkaar nemen:  
toelichting:

$$(2pq - 3p^2)(p + 2q) - (q^2 - 2pq)(2p - q) = -3p^3 + q^3$$

$$(2t - 3)(5t^2 + 3t - 1) = 10t^3 - 9t^2 - 11t + 3$$

Ontbinden in factoren:

Toelichting:

$$8x^2y^2 - 16xy = 8xy(xy - 2)$$

$$p^2q - q^2p = pq(p - q)$$

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$$

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

$$P(1 + r) + P(1 + r)r = P(1 + r)(1 + r) = P(1 + r)^2$$

Breuken:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$$

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Toelichting:

Tel op:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$  zonder rekenmachine.

$$\text{Vereenvoudig: } \frac{x^2 + x - 5}{x - 7} - \frac{x^2 - 2}{x - 7} + \frac{-4x + 8}{x^2 - 9x + 14} \text{ en } \frac{y^2 - 4}{y^2 + 2y} \div \frac{y - 2}{y^2}$$

$$\text{Vereenvoudig: } \frac{(x + 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x + 1)^2} = \frac{1 - x}{2\sqrt{x} \cdot (x + 1)^2}$$

$$\text{Vereenvoudig: } \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

Manipuleren met wortels:

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3} \text{ enz.}$$

## VERGELIJKINGEN:

Equivalenten bewerkingen:

Bij beide kanten hetzelfde optellen of aftrekken.

Beide kanten vermenigvuldigen met of delen door dezelfde constante ongelijk 0.

Lineaire vergelijkingen:  $ax + b = 0$

Kwadratische vergelijkingen:  $ax^2 + bx + c = 0$

De formule:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Toelichting:

Los op:

$$\frac{p}{3} + \frac{3}{4}p = \frac{9}{2}(p - 1)$$

$$\frac{1}{3x + 1} = \frac{2}{x + 2}$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x - 1, 17)^2 = 0$$

$$x^2 - 3x - 7 = 0$$

$$\frac{2}{x - 2} - \frac{x + 1}{x + 4} = 0$$

Vergelijkingen met wortels, los op:

$$q + 2 = 2\sqrt{4q - 7}$$

$$\sqrt{x + 2} = x - 40$$

## ONGELIJKHEDEN

Lineaire en kwadratische ongelijkheden. Tekenverloopschema.

Lineair gebroken ongelijkheden.

Toelichting:

$$5(x - 4) - 6(x + 2) > 4$$

$$x^2 < 2x$$

$$\frac{2x - 3}{x - 1} > 3 - x$$

$$\text{ABSOLUTE WAARDE : } |3 - 2x| = 7$$

$$|4t - 1| < 1$$

## INTERVALLEN

Open interval:  $a < x < b$  en gesloten interval:  $a \leq x \leq b$

Half open / half gesloten interval.

## VERGELIJKINGEN MET PARAMETERS

Los op voor  $P$ :  $S = \alpha + \beta P$

Los op voor  $z$ :  $\frac{x - 2y + xz}{x - z} = 4y$

## FUNCTIES EN GRAFIEKEN

$(x,y)$ -assenstelsel. Domein en bereik. Notatie:  $y = f(x) = \dots$

Begrippen onafhankelijke en afhankelijke variabele.

Combinaties van functies:

Som, verschil, product en quotient van twee functies.

Samengestelde functies:  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Lineaire functies. Richtingscoëfficiënt. Het snijpunt van twee lineaire functies.

Kwadratische functies, parabolen. De grafieken van :

$$y = x^2, y = x^3, y = \sqrt{x}, y = \frac{1}{x}, y = |x|$$

Exponentiële functies:  $f(x) = a^x$  met  $a > 0$  en  $a \neq 1$

Het getal  $e \approx 2,72$  en de grafiek:  $y = e^x$

Inverse functies:  $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{inv}(y)$  (alleen voor eenvoudige functies)

$$\text{bijvoorbeeld: } y = f(x) = 3x - 2 \Leftrightarrow x = f^{inv}(y) = \frac{y + 2}{3}$$

$$\text{en: } q = \frac{400}{p^2} \Rightarrow p = \frac{20}{\sqrt{q}} = 20 \cdot q^{-\frac{1}{2}}$$

Logaritmen en logaritmische functies:

${}^g \log a$  is de macht waartoe we  $g$  moeten verheffen om  $a$  te krijgen.

$${}^g \log a = b \Leftrightarrow a = g^b, \text{ met } a > 0, g > 0 \text{ en } g \neq 1$$

Notaties:  ${}^{10} \log x = \log_{10} x = \log x$  en  ${}^e \log x = \ln x$

Toelichting, bereken (zonder rekenmachine):

$${}^2 \log \frac{1}{16}, \log 0,001$$

Eigenschappen:

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

$$\log(a^b) = b \log a$$

De natuurlijke logaritme:  $\ln x = {}^e \log x$

voor elke  $a > 0$  geldt:  $a = e^{\ln a}$ , dus:  $a^x = e^{x \ln a}$

$${}^g \log x = \frac{\ln x}{\ln g}$$

Logaritmische en exponentiële vergelijkingen:

Los op:

$$\log x + \log(x - 15) = 2$$

$$200 \cdot (1,06)^t = 500 \cdot (0,96)^t$$

$$8^x = \frac{1}{4}$$

Goniometrie:

Hoekmaat in graden en radialen.

De begrippen sin, cos en tan in een rechthoekige driehoek

Hoekmaat in graden en radialen

De eenheidscirkel.

De grafieken van  $\sin x$ ,  $\cos x$  en  $\tan x$  als functies van een reële variabele (Rad.)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Amplitude, frequentie en verschuivingen:

Grafieken van  $y = A \cdot \sin x$ ,  $y = A \cdot \sin 2x$  en  $y = A \cdot \sin 2(x - \varphi)$

Differentiaalrekening:

Een eenvoudige behandeling van limieten:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

" $f(x)$  komt willekeurig dicht bij  $b$  als  $x$  maar voldoende dicht bij  $a$  gekozen wordt, maar niet gelijk aan  $a$ "

Horizontale asymptoot:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$

Verticale asymptoot:  $\lim_{x \uparrow \downarrow a} f(x) = \pm\infty$

De afgeleide functie:  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f'(a)$  is de r.c. van de raaklijn aan de grafiek van  $f$  in het punt  $(a, f(a))$

De r.c. van de raaklijn aan de grafiek is:  $\tan \alpha$  waarbij  $\alpha$  de hoek is die de raaklijn maakt met de positieve x-as.

Standaard-afgeleiden:

$$f(x) \quad f'(x)$$

$$x^a \quad a \cdot x^{a-1}$$

$$e^x \quad e^x$$

$$a^x \quad a^x \ln a$$

$$\ln x \quad \frac{1}{x}$$

$${}^g \log x \quad \frac{1}{x \ln g}$$

$$\sin x \quad \cos x$$

$$\cos x \quad -\sin x$$

Verder de differentieerregels:

Som, verschil, product en quotiëntregel.

Kettingregel: algemene machtsregel:  $f(x) = [u(x)]^a \Rightarrow f'(x) = a \cdot [u(x)]^{a-1} \cdot u'(x)$

en voor exponentiële en logaritmische functies:

$$f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$$

$$f(x) = \ln u(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$$

Toepassingen: functieonderzoek, uiterste waarden, raaklijn.  
Voorbeelden:

Gegeven is de functie:  $f(x) = \frac{2}{x - \sqrt{x}}$  Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van de functie in het punt waar  $x = 4$ .

Gegeven is de functie:  $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2}$

Bepaal het domein van de functie.

Bepaal de uiterste waarden van de functie en de aard van de uiterste waarden (maximum, minimum).

Ook met logaritmische en exponentiële functies:

Met als domein  $x \neq 0$  is gegeven de functie:  $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

Bepaal de uiterste waarde(n) van de functie en de aard van de uiterste waarde(n) (maximum, minimum).

Tenslotte enige praktische toepassingen in de economie:

Winst = opbrengst – kosten.

Opbrengst = prijs  $\times$  hoeveelheid.

Voorbeeld:

Van een productieproces is de kostenfunctie gegeven door:  $K = 2q + 10$

De gevraagde hoeveelheid is afhankelijk van de prijs volgens:  $q = \frac{400}{p^2}$

Bereken welke hoeveelheid er geproduceerd moet worden om maximale winst te verkrijgen, indien we uitgaan van marktevenwicht, en de totale productie wordt verkocht.

Opmerkingen:

1. Er zijn hier geen onderwerpen uit de statistiek genoemd, maar het verdient beslist aanbeveling ook hierover van gedachten te wisselen en een lijst van gewenste onderwerpen samen te stellen. Onderwerpen uit de kansrekening en statistiek beslaan nu immers al een groot deel van de wiskundestof.
2. Het is o.i. niet nodig om **lange stukken tekst** te verklaren en daarbij dan formules te bedenken. De eindexamens wiskunde A1,2 en trouwens ook B1 beginnen steeds meer op tekst-exegese te lijken, terwijl de werkelijke wiskundige vaardigheden slechts minimaal worden getoetst.
3. Literatuur:
 

<i>Introductory Mathematical Analysis.</i> door: Haeussler, Paul & Wood Uitgeverij: Pearson (Prentice Hall) ISBN: 0 13 127629 8 Hoofdstukken: 0 t/m4, 11, 12.1, 12.2, 13.1, 13.2	<i>Wiskunde voor het hoger onderwijs</i> door: Van Pelt, Pijlgroms & Walter Uitgeverij: Wolters Noordhoff ISBN: 90 01 03338 5 Alles, behalve leereenheid 3.3 (integreren)
--	---
4. Het lijkt ons niet nodig om veel aandacht aan de grafische rekenmachine te besteden.
5. Een punt van discussie kan zijn in hoeverre er aandacht aan de tweede afgeleide besteed moet worden, en de begrippen convex, concaaf, buigpunt.