Projectieve meetkunde, voorjaar 2010

Docent: B.J.J. Moonen

Opgaven voor het werkcollege

Opgave 1. Zij V een vectorruimte over een lichaam k. De *duale vectorruimte*, notatie $V^\vee$, is de ruimte

$$V^\vee := \mathrm{Hom}_k(V, k)$$

van lineaire afbeeldingen $V \to k$. Deze ruimte heeft de structuur van een k-vectorruimte via de gebruikelijke formules

$$(\lambda + \mu)\big(v\big) := \lambda(v) + \mu(v) \qquad \text{en} \qquad (a \cdot \lambda)\big(v\big) := a \cdot \lambda(v)\,,$$

voor λ, $\mu \in V^\vee$ en $a \in k$.

(i) Zij $f\colon U \to V$ een lineaire afbeelding van k-vectorruimten. Beschouw de afbeelding $f^\vee\colon V^\vee \to U^\vee$ gegeven door $\mu \mapsto \mu \circ f$. Laat zien dat $f^\vee$ een lineaire afbeelding is. Laat vervolgens zien dat de afbeelding $\mathrm{Hom}_k(U, V) \to \mathrm{Hom}_k(V^\vee, U^\vee)$ gegeven door $f \mapsto f^\vee$ een lineaire afbeelding is.

(ii) Zij $v \in V$. Definieer een afbeelding $\mathrm{ev}_v\colon V^\vee \to k$ door $\mathrm{ev}_v(\lambda) = \lambda(v)$. Laat zien dat ev_v een lineaire afbeelding is. Laat verder zien dat de afbeelding $\varphi_V\colon V \to V^{\vee\vee}$ gegeven door $v \mapsto \mathrm{ev}_v$ een lineaire afbeelding is. [Pas onderdeel (i) toe met $U = k$.]

(iii) Bewijs dat de afbeeling φ_V uit (ii) injectief is.

(iv) Zij nu V een k-vectorruimte van *eindige* dimensie. Bewijs dat $\dim_k(V) = \dim_k(V^\vee)$. Concludeer dat de afbeelding φ_V in dit geval een isomorfisme is.

(v) Zij nu $V = k^{\mathbb{N}}$. Bewijs dat de afbeelding φ_V in dit geval niet surjectief is.

Opmerking: In het algemeen geldt dat $\varphi_V\colon V \to V^{\vee\vee}$ een isomorfisme is dan en slechts dan als de dimensie van V (als k-vectorruimte) eindig is.

Opgave 2. Zij k een lichaam en beschouw de projectieve ruimte $\mathbb{P}^n(k)$.

(i) Voor $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, laat $U_i \subset \mathbb{P}^n(k)$ de deelverzameling zijn van punten $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ met $x_i \neq 0$. Neem nu aan dat $n \geqslant 1$. Geef een bijectie tussen $\mathbb{P}^n(k) \setminus U_i$ en $\mathbb{P}^{n-1}(k)$.

(ii) Stel dat het lichaam k eindig is, en zij q het aantal elementen van k. Laat zien dat het aantal elementen van $\mathbb{P}^n(k)$ gelijk is aan $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = (q^{n+1} - 1)/(q - 1)$. [*Hint:* Gebruik onderdeel (i) en volledige inductie naar n.]

Opgave 3. Zij k een lichaam.

(i) Zij S de verzameling van paren (ℓ_1, ℓ_2) van projectieve lijnen in $\mathbb{P}^2(k)$ met $\ell_1 \neq \ell_2$. Als $(\ell_1, \ell_2) \in S$ en $(m_1, m_2) \in S$, bewijs dat er een projectieve transformatie $f\colon \mathbb{P}^2(k) \to \mathbb{P}^2(k)$ bestaat zo dat $f(\ell_1) = m_1$ en $f(\ell_2) = m_2$.

(ii) Nu doen we hetzelfde in $\mathbb{P}^3(k)$. Zij T de verzameling van paren (ℓ_1, ℓ_2) van projectieve lijnen in $\mathbb{P}^3(k)$ met $\ell_1 \neq \ell_2$. We noemen twee paren $(\ell_1, \ell_2) \in T$ en $(m_1, m_2) \in T$ equivalent, notatie $(\ell_1, \ell_2) \sim (m_1, m_2)$, als er een inverteerbare projectieve transformatie $f\colon \mathbb{P}^3(k) \to \mathbb{P}^3(k)$ bestaat zo dat $f(\ell_1) = m_1$ en $f(\ell_2) = m_2$. Je mag zonder verder bewijs gebruiken dat de relatie $\sim$ een equivalentierelatie op de verzameling T is. Bepaal het aantal equivalentieklassen onder $\sim$ en geef een volledig bewijs voor je antwoord.

Opgave 4. Zij k een lichaam.

(i) Gegeven zijn k-vectorruimte V en W met $\dim_k(V) = m+1$ en $\dim_k(W) = n+1$. Zij $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding en zij $f^\vee\colon W^\vee \to V^\vee$ de duale lineaire afbeelding. Nu kiezen we geordende bases $\{e_0, \dots, e_m\}$ voor V en $\{f_0, \dots, f_n\}$ voor W. Zoals gebruikelijk schrijven we $\{e_0^\vee, \dots, e_m^\vee\}$ en $\{f_0^\vee, \dots, f_n^\vee\}$ voor de duale bases. Als A de matrix is van de afbeelding f t.o.v. de gegeven bases, wat is dan de matrix van $f^\vee$ t.o.v. de duale bases?

Het geven van een geordende basis $\mathbf{e} = \{e_0, \dots, e_m\}$ voor V is equivalent met het geven van een isomorfisme $\beta\colon k^{m+1} \xrightarrow{\sim} V$. Om precies te zijn: aan $\mathbf{e}$ voegen we het isomorfisme $\beta_\mathbf{e}$ toe dat wordt gegeven door $\beta_\mathbf{e}(a_0, \dots, a_m) = a_0e_0 + \cdots + a_me_m$.

(ii) De keuze van een geordende basis $\mathbf{e}$ voor V geeft ons een isomorfisme

$$\gamma_\mathbf{e}\colon V \xrightarrow{\sim} V^\vee$$

door $\gamma_\mathbf{e} := \beta_{\mathbf{e}^\vee} \circ \beta_\mathbf{e}^{-1}$, waarbij $\mathbf{e}^\vee$ de duale basis is. Laat zien dat als $m \geqslant 1$ het geïnduceerde isomorfisme $\mathbb{P}(\gamma_\mathbf{e})\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V^\vee) \cong \mathbb{P}^\vee(V)$ afhangt van de keuze van de basis.

(iii) Neem nu aan dat $m = 1$, dus $\dim(V) = 2$. In dit geval is $\mathbb{P}(V)$ gewoon hetzelfde als $\mathbb{P}^\vee(V)$ en dus kan het isomorfisme $\mathbb{P}(\gamma_\mathbf{e})$ worden opgevat als een isomorfisme van $\mathbb{P}(V)$ naar zichzelf. Geef de matrix (uniek bepaald op een constante in k^* na) van deze projectieve transformatie t.o.v. de gekozen basis.

Opgave 5. In deze opgave werken we in het projectieve vlak $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

(i) Gegeven zijn vier punten A, B, C, $D \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ waarvan geen drietal op een lijn ligt. Definieer $P = AB \cap CD$ als het snijpunt van de lijnen AB (door A en B) en CD (door C en D). Op soortgelijke manier definiëren we $Q = AC \cap BD$ en $R = AD \cap BC$. Bewijs dat de punten P, Q en R *niet* op een lijn liggen.

(ii) Formuleer de duale versie van het in (i) bewezen resultaat.

Opgave 6. We werken over een lichaam k. Gegeven zijn een k-vectorruimte V van eindige dimensie en een bilineaire vorm $B\colon V \times V \to k$.

(i) Als $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ een geordende basis voor V is, definieer dan een $n \times n$ matrix $b_\mathbf{e} = (b_{ij})$ door $b_{ij} = B(e_i, e_j)$. Zij nu $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_n\}$ een tweede geordende basis voor V, en zij $Q \in \mathrm{GL}_n(k)$ de matrix die de basisverandering van $\mathbf{e}$ naar $\mathbf{f}$ geeft. (Dus de j^e kolom van Q geeft de coördinaten van f_j ten opzichte van de basis $\mathbf{e}$.) Druk de matrix $b_\mathbf{f}$ uit in $b_\mathbf{e}$ en Q.

(ii) Laat zien dat de vorm B symmetrisch is dan en slechts dan als de matrix $b_\mathbf{e}$ symmetrisch is.

(iii) Laat zien dat de vorm B niet-ontaard is dan en slechts dan als de matrix $b_\mathbf{e}$ inverteerbaar is.

Opgave 7. Geef polynomen $f_0(t,u)$, $f_1(t,u)$ en $f_2(t,u)$ in de variabelen t en u, elk homogeen van graad 2, zo dat de afbeelding $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ gegeven door $(t:u) \mapsto \big(f_0(t,u) : f_1(t:u) : f_2(t:u)\big)$ een bijectie geeft tussen $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ en de kegelsnede $Q \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ gegeven door de vergelijking $x_0^2 + 2x_0x_1 + 4x_0x_2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$.

Opgave 8. We werken over een lichaam k van karakteristiek $\neq 2$. Zij V een k-vectorruimte van dimensie d.

(i) Laat zien dat het geven van een geordende basis $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_d\}$ van W equivalent is met het geven van een isomorfisme van vectorruimten $\varphi_\mathbf{e}\colon k^d \xrightarrow{\sim} W$.

(ii) Zijn $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_d\}$ en $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_d\}$ twee geordende bases van V en zij Q de basisovergangsmatrix. (Dus de j^{e} kolom van Q geeft de coördinaten van f_j ten opzichte van de basis $\mathbf{e}$.) De ruimte $\wedge^d V$ is 1-dimensionaal en de vectoren

$$e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_d \qquad \text{en} \qquad f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_d$$

zijn allebei basisvectoren. Schrijf $\psi_{\mathbf{e}}\colon k \xrightarrow{\sim} \wedge^d V$ en $\psi_{\mathbf{f}}\colon k \xrightarrow{\sim} \wedge^d V$ voor de bijbehorende isomorfismen. Wat is het automorfisme $\psi_{\mathbf{f}}^{-1} \circ \psi_{\mathbf{e}}$ van k ?

(iii) We nemen nu $d = 3$, dus $\dim_k(V) = 3$. Beschouw de afbeelding $i\colon \wedge^2 V \to \mathrm{Hom}_k(V, \wedge^3 V)$ die wordt gegeven door $i(\alpha)\bigl(v\bigr) = \alpha \wedge v$. Laat zien dat i een isomorfisme van k-vectorruimten is.

(iv) We passen het voorgaande toe op de vectorruimte $V = k^3$ die we voorzien van de bilineaire vorm

$$B\colon k^3 \times k^3 \to k \qquad \text{gegeven door} \qquad B\bigl((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\bigr) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3\,.$$

Zoals in een eerdere opgave behandeld, geeft B een isomorfisme van V met zijn eigen duale: de afbeelding $\beta\colon V \to V^\vee$ gegeven door $\beta(v)\bigl(v'\bigr) = B(v, v')$ is een isomorfisme.

Zij $\mathbf{e}$ de standaardbasis van k^3. Het isomorfisme $\psi_{\mathbf{e}}\colon k \xrightarrow{\sim} \wedge^3 V$ uit onderdeel (ii) geeft samen met het isomorfisme $\beta\colon V \xrightarrow{\sim} V^\vee$ een identificatie

$$\mathrm{Hom}_k(V, \wedge^3 V) \cong \mathrm{Hom}_k(V, k) = V^\vee \cong V\,.$$

Via deze identificatie kunnen we het isomorfisme $i\colon \wedge^2 V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(V, \wedge^3 V)$ uit onderdeel (iii) opvatten als een isomorfisme $\wedge^2 V \xrightarrow{\sim} V$. Laat zien dat onder dit isomorfisme het uitwendige product $v_1 \wedge v_2$ van twee vectoren in V niets anders is dan het uitproduct $v_1 \times v_2$.

Opgave 9. Zij $V = k^4$ en beschouw de projectieve ruimte $\mathbb{P}^3(k) = \mathbb{P}(V)$, waarop we homogene coördinaten $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ gebruiken. Laat dan $W := \wedge^2 V$ en beschouw $\mathbb{P}(W) \cong \mathbb{P}^5$ waarop we homogene coördinaten $(y_{01} : y_{02} : y_{03} : y_{12} : y_{13} : y_{23})$ hebben. De Klein kwadriek is de kwadriek $Q \subset \mathbb{P}(W)$ gegeven door de vergelijking

$$y_{01} y_{23} - y_{02} y_{13} + y_{03} y_{12} = 0\,.$$

(i) Voor $a \in k$, zij $\ell_a \subset \mathbb{P}^3(k)$ de lijn door de punten $(0 : 0 : a : 1)$ en $(1 : 1 : 1 : 0)$. Bereken het punt $P_a \in Q$ dat onder de correspondentie van Propositie 18 correspondeert met ℓ_a.

(ii) Zij $\ell' \subset \mathbb{P}^3(k)$ de lijn door de punten $(1 : 0 : 1 : 0)$ en $(2 : 2 : 3 : -1)$. Laat zien dat ℓ' correspondeert met het punt $P' = (2 : 1 : -1 : -2 : 0 : -1) \in \mathbb{P}(W)$.

(iii) Voor welke waarden van a gaan de lijnen ℓ_a en ℓ' door een punt?

(iv) Ga door rechtstreekse berekening na voor welke waarden van a de lijn in $\mathbb{P}(W)$ door de punten P_a en P' geheel bevat is in Q. Klopt je antwoord met wat je hebt gevonden in (iii) ? (Zie Propositie 19.)

Opgave 10. Notatie als in de vorige opgave.

(i) Geef vergelijkingen voor de lijn $\ell \subset \mathbb{P}^3(k)$ die correspondeert met het punt $(1 : 1 : 0 : -2 : 3 : 3) \in Q$.

(ii) Beschouw het vlak in $\mathbb{P}(W)$ gegeven door de vergelijkingen $y_{01} = y_{02} = y_{12} = 0$. Merk op dat dit vlak bevat is in Q. Is dit vlak een α-vlak of een β-vlak (in Hitchins terminologie)? Idem voor het vlak gegeven door $y_{01} = y_{12} = y_{13} = 0$. Motiveer je antwoorden.