PROJECTIEVE MEETKUNDE

Oefentoets, ter voorbereiding op de tussentoets van 26 maart 2010, 9:00–12:00

Belangrijk:
— Geef duidelijke en volledige bewijzen van de beweringen die je doet. Je mag de resultaten die zijn behandeld gebruiken, maar je dient wel duidelijk te vermelden welke resultaten je gebruikt.

Opgave 1. We werken in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Gegeven zijn de punten

$$P_1 = (1:2:0)\,, \quad P_2 = (1:-1:1)\,, \quad P_3 = (14:0:-7)\,.$$

Voor $a \in \mathbb{R}$, zij $Q(a)$ het punt $(a : a+1 : 1)$.
(i) Bepaal alle waarden voor a zo dat de punten P_1, P_2, P_3 en $Q(a)$ *niet* in algemene positie zijn.
(ii) Laat $Q = Q(1) = (1:2:1)$. Geef een projectieve transformatie $f\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ zo dat

$$f(P_1) = (1:0:0)\,, \quad f(P_2) = (0:1:0)\,, \quad f(P_3) = (0:0:1) \quad \text{en} \quad f(Q) = (1:1:1)\,.$$

Opgave 2. We werken in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.
(i) Gegeven zijn een punt $P \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, een projectieve lijn $L \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ met $P \notin L$, en een projectief vlak $V \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Gegeven is verder dat er bij elk punt $R \in V$ een punt $Q \in L$ bestaat zo dat P, Q en R op een lijn liggen. Bewijs dat $L \subset V$.
(ii) Formuleer de duale versie van opgave (i).

Opgave 3. Zij V de 3-dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte van polynomen $f(x)$ van graad $\leqslant 2$; dus

$$V = \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 \;\middle|\; a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Definieer $B\colon V \times V \to \mathbb{R}$ door

$$B(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx\,.$$

(i) Laat zien dat B een bilineaire vorm is.
(ii) Beschouw de basis $\{e_0, e_1, e_2\}$ van V gegeven door

$$e_0 = 1\,, \quad e_1 = x\,, \quad e_2 = x^2\,.$$

Bepaal de matrix van B ten opzichte van deze basis.
(iii) Is de vorm B ontaard of niet-ontaard? Bewijs je bewering.
(iv) Geef een basis van V zo dat de vorm B ten opzichte van deze basis gegeven wordt door een diagonaalmatrix met diagonaalcoëfficiënten in $\{0, -1, 1\}$.

Opgave 4. Gegeven is een $\mathbb{R}$-vectorruimte V van eindige dimensie en een symmetrische bilineaire vorm $B\colon V \times V \to \mathbb{R}$. Bewijs dat er deelruimten V_1, $V_2 \subseteq V$ bestaan zo dat
(a) $V = V_1 \oplus V_2$,
(b) $B(v_1, v_2) = 0$ voor alle $v_1 \in V_1$ en $v_2 \in V_2$, d.w.z., de directe som in (i) is een loodrechte directe som,
(c) $B(v_1, v_1') = 0$ voor alle v_1, $v_1' \in V_1$, d.w.z., de beperking van B tot V_1 is de nulvorm,
(d) de beperking van B tot V_2 is niet-ontaard.