Uitwerking Oefentussentoets

March 21, 2010

Opgave 1

Gegeven zijn de punten $P_1 = (1 : 2 : 0)$, $P_2 = (1 : -1 : 1)$ en $P_3 = (14 : 0 : -7)$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Voor $a \in \mathbb{R}$, zij $Q(a)$ het punt $(a : a + 1 : 1)$.

(i) Bepaal alle waarden voor a zo dat de punten P_1, P_2, P_3 en Q niet in algemene positie zijn.

(ii) Stel $a = 1$. Geef een projectieve transformatie $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ zo dat $f(P_1) = (1 : 0 : 0)$, $f(P_2) = (0 : 1 : 0)$, $f(P_3) = (0 : 0 : 1)$ en $f(Q(a)) = (1 : 1 : 1)$.

(i) In $\mathbb{P}^n$ zeggen we dat een verzameling van $n+2$ punten in algemene positie ligt, als het volgende geldt: Bekijk representatieve vectoren die bij de punten horen. Haal je een willekeurige vector weg dan hou je een basis van $\mathbb{R}^{n+1}$ over.

In dit geval is $n = 2$ dus moeten we van alle vier de drietallen vectoren nagaan of ze lineair onafhankelijk zijn. Dat kan met vegen van kolommen. Je kunt ook de vier 3 bij 3 determinanten uitrekenen, want de determinant is 0 dan en slechts dan als de kolommen van de matrix lineair afhankelijk zijn. Zo vind je de vier determinaten $35 + 28a$, $21 + 7a$, $-4 + a$ en 49. De vier punten zijn dus niet in algemene positie wanneer een van deze functies van a gelijk is aan 0, dus als $a = -\frac{5}{4}$, $a = -3$ of $a = 4$.

(ii) Het is het eenvoudigste om eerst de inverse afbeelding f^{-1} te vinden omdat we dan met de standaardbasis kunnen werken. Stel A is de 3 bij 3 matrix die de afbeelding f^{-1} definieert. Het voordeel hiervan is dat de kolommen van de matrix A precies de beelden van de basisvectoren $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ zijn. Die kolommen moeten dus representatieve vectoren voor P_1, P_2 en P_3 zijn. Maar wel zo dat ze optellen tot $Q(1) = (1, 2, 1)$ want $(1, 1, 1)$ is namelijk de som van de drie basisvectoren. Je kunt nagaan dat $\frac{9}{7}(1, 2, 0) + \frac{4}{7}(1, -1, 1) - \frac{3}{49}(14, 0, -7) = (1, 2, 1)$. Dus de projectieve transformatie f^{-1} kunnen we definieeren door een matrix A met kolommen $\frac{9}{7}(1, 2, 0)$, $\frac{4}{7}(1, -1, 1)$, $-\frac{3}{49}(14, 0, -7)$. De inverse van A definieert dan tot slot de gevraagde afbeelding f.

Opgave 2

We werken in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

(i) Gegeven zijn een projectieve lijn L, een punt P niet op L en een projectief vlak V. Verder weten we dat bij elk punt $R \in V$ er een punt $Q \in L$ bestaat zo dat P, Q, R colineair zijn. Bewijs dat $L \subset V$.

(ii) Formuleer de duale versie van onderdeel (i).

(i) Een schetsje laat intuitief zien dat P en L samen een projectief vlak W definieeren. Een lijn door twee punten in een vlak ligt geheel binnen het vlak, dus de conditie hierboven zegt dat alle punten $R \in V$ in W liggen omdat P en Q dat doen. Daarom vallen V en W blijkbaar samen. Dus V bevat L.

Om dit wat preciezer te formuleren geven we representatieve vectoren in $\mathbb{R}^4$ bij de objecten P en L. Stel $P = P(\text{Span}\{p\})$, $L = P(\text{Span}\{l, l'\})$. Omdat P niet op L ligt, zijn de drie vectoren p, l, l' onafhankelijk. Definieer dus het projectieve vlak $W = P(\text{Span}\{p, l, l'\})$.

We laten nu zien dat $V \subset W$. Kies een punt $R \in V$ met representatieve vector r. We weten dat er dan een $Q \in L$ (met representatieve vector q) is zodat P, Q en R op een lijn liggen. Dat wil zeggen dat de vectoren p, q, r lineair afhankelijk zijn. Dus dat r een lineaire combinatie is van p en q. Maar dat betekent dat $r \in \text{Span}\{p, l, l'\}$, dus $R \in W$.

Omdat W en V dezelfde dimensie hebben volgt uit $V \subset W$ dat $W = V$. Per definitie was $L \subset W$ dus nu ook $L \subset V$.

(ii) Gegeven zijn een projectieve lijn L' een projectief vlak P' waar L' niet op ligt en een projectief punt V'. Verder weten we dat bij elk vlak R' door V' er een vlak Q' door L' bestaat zodat de vlakken P', Q' R' door een punt gaan. Bewijs dat L' door V' gaat.

Opgave 3

Deze opgave gaat over de vectorruimte V van polynomen van graad ≤ 2.

$$V = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 | a_i \in \mathbb{R}\}$$

Hierbij definieeren we een functie $B : V \times V \to \mathbb{R}$ door $B(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

(i) Laat zien dat B een bilineaire vorm is.

(ii) Bepaal de matrix van B ten opzichte van de matrix $e_0 = 1$, $e_1 = x$, $e_2 = x^2$.

(iii) Is B ontaard of niet? Bewijs je bewering.

(iv) Geef een basis zo dat de vorm B ten opzichte van deze basis gegeven wordt door een diagonaalmatrix met coefficienten in $\{0, -1, 1\}$.

(i) $B(f, g) = B(g, f)$ dus we hoeven alleen te laten zien dat B lineair is in de eerste variabele.

$$B(af+g, h) = \int_0^1 (af+g)h(x)dx = a\int_0^1 fh(x)dx + \int_0^1 gh(x)dx = aB(f, h) + B(g, h)$$

(ii) De gegeven een basis $E = \{e_i\}$ is de matrix B_E ten opzichte van die basis niets anders dan $(B_E)_{ij} = B(e_i, e_j)$. De matrix is dus:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

(iii) Een bilineaire vorm is ontaard dan en slechts dan als zijn matrix determinant 0 heeft, en dat is niet zo. De determinant van de matrix uit (ii) is $\frac{1}{2160}$.

(iv) We maken a la Gram-Schmidt een orthonormale basis $\{f_0, f_1, f_2\}$, beginnend met de functie $f_0 = e_0 = 1$. Merk op dat $\tilde{f}_1 = e_1 - B(e_1, f_0)f_0$ voldoet aan $B(f_0, \tilde{f}_1) = 0$ en dat $\tilde{f}_1 = x - \frac{1}{2}$, maar $B(\tilde{f}_1, \tilde{f}_1) = \frac{1}{12}$. We definieeren dus $f_1 = \sqrt{12}\tilde{f}_1 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}$, zodat $B(f_1, f_1) = 1$. Tot slot vinden we op dezelfde manier $\tilde{f}_2 = e_2 - B(e_2, f_0)f_0 - B(e_2, f_1)f_1 = x^2 - x + \frac{1}{6}$ en we berekenen dat $B(\tilde{f}_2, \tilde{f}_2) = \frac{1}{180}$, dus de laatste basisvector is $f_2 = 6\sqrt{5}x^2 - 6\sqrt{5}x + \sqrt{5}$. Als je de berekeningen terugleest zie je dat de matrix van B ten opzichte van de f-basis gelijk is aan de eenheidsmatrix.

Opmerking. De polynomen die we zo gevonden hebben, heten orthogonale polynomen. Dit is een vakgebied op zichzelf want deze polynomen en hun broertjes van hogere graad blijken wonderbaarlijke eigenschappen te bezitten. Bovendien komen ze op tal van plaatsen in de wiskunde voor. De polynomen die we hebben gezien zijn gerelateerd aan de Legendre-polynomen. Verander je de definitie van B dan krijg je een andere familie orthogonale polynomen.

Opgave 4

Gegeven is een $\mathbb{R}$-vectorruimte V van eindige dimensie en een symmetrische bilineaire vorm $B : V \times V \to \mathbb{R}$. Bewijs dat er lineaire deelruimten V_1, V_2 in V bestaan zodat aan (a)-(d) voldaan is:

(a) $V = V_1 \oplus V_2$

(b) $B(v_1, v_2) = 0$ voor alle $v_1 \in V_1$ en $v_2 \in V_2$.

(c) $B(v_1, v_1') = 0$ voor alle $v_1, v_1' \in V_1$.

(d) De beperking van B tot V_2 is niet ontaard (d.w.z. Stel $v_2' \in V_2$. Als $B(v_2, v_2') = 0$ voor alle $v_2 \in V_2$ dan geldt $v_2' = 0$).

Uit onderdelen (b) en (c) leiden we af dat een geschikte definitie voor V_1 is:

$$V_1 = \{v \in V | \forall v' \in V, B(v, v') = 0\}$$

Uit onderdeel (a) leiden we dan af dat we V_2 als volgt kunnen construeren. Een basis van V_1 kan worden aangevuld met een stel vectoren $e_1, \ldots, e_k$ tot een basis van de hele V. Definieer dus $V = \text{Span}\{e_1, \ldots, e_k\}$, dan is in elk geval aan onderdeel (a) voldaan. Zoals eerder opgemerkt is aan (b) en (c) ook voldaan per constructie.

We controleren tot slot (d). Stel er is een $v_2' \in V_2$ zodat voor alle $v_2 \in V_2$ geldt $B(v_2, v_2') = 0$. Dan geldt zelfs $B(v, v_2') = 0$ voor alle $v \in V$. Dat komt omdat wegens (a) iedere $v \in V$ te schrijven is als $w_1 + w_2$ met $w_i \in V_i$ en dus $B(v, v_2') = B(w_1, v_2') + B(w_2, v_2') = 0$, dat volgt uit de definities. Maar als $B(v, v_2') = 0$ voor alle $v \in V$ dan zit v_2' in V_1 dus $v_2' \in V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Dat laatste volgt uit (a). Dus $v_2' = 0$. We hebben dus bewezen dat B niet ontaard is op V_2.