PRAKTISCHE INFORMATIE BIJ HET VAK ALGEBRA 3

najaar 2007

Docent: B.J.J. Moonen

Er is bij dit vak een webpagina: `www.science.uva.nl/~bmoonen/Alg3/Alg3.html` . Hier is in principe alle informatie te vinden die je nodig hebt, en zoniet, vraag dan even verdere informatie bij de docent. Als het vak eenmaal op gang is dan zullen we grotendeels het boek van J.-P. Serre volgen. Voor de onderdelen die in dat boek niet worden behandeld zal aanvullende literatuur worden opgegeven op de webpagina. De relevante literatuur zal in de bibliotheek zoveel mogelijk weggezet worden in de kast met niet-uitleenbare boeken (op de begane grond). Als je delen uit boeken wilt kopiëren, maak daarover zoveel mogelijk onderling afspraken! Het is zinloos als iedereen dezelfde tekst gaat staan kopiëren.

Gedurende het semester zal er een paar keer een huiswerkopdracht worden uitgedeeld. Je uitwerking hiervan dien je in te leveren. Voldoende score hiervoor is een eis om het vak te halen; anders gezegd: deelname hieraan is *verplicht*. Er is geen mogelijkheid om na het semester een vervangende regeling te treffen. Eenieder wordt met klem aangeraden om aktief deel te nemen aan het werkcollege, dat geleid wordt door Jonas Bergström. Hij is pas sinds juli 2007 in Nederland en hoewel zijn Nederlands nog niet helemaal vloeiend is, verwacht ik daarmee geen problemen. Indien nodig kan men in conversaties met hem overgaan op het Engels.

Onderstaande informatie is vooral gericht op de mastersstudenten die dit vak willen volgen. Van hen wordt verwacht dat zij zelfstandig de theorie van semisimpele algebra's bestuderen. (Samen studeren mag, en wordt zelfs zeer aangemoedigd.) Als dit moeilijkheden oplevert dan kan er bij de docent een vragenuurtje worden aangevraagd. Bij de huiswerkopdrachten zullen opgaven komen die gaan over deze theorie. (Alleen voor de mastersstudenten uiteraard.)

De theorie van semisimpele algebra's (in beter Nederlands: halfenkelvoudige algebra's) is onderhand klassiek en is te vinden in diverse boeken. Als mogelijke bronnen noem ik:

Bourbaki, N. *Éléments de mathématique. Livre II: Algèbre.* Chapitre 8: Modules et anneaux semi-simples.

Curtis, C. W., Reiner, I. *Methods of representation theory. Vol. I.* Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1981.

Lam, T. Y. *A first course in noncommutative rings. Second edition.* Graduate Texts in Mathematics, 131. Springer-Verlag, New York, 2001.

Lang, S. *Algebra. Revised third edition.* Graduate Texts in Mathematics, 211. Springer-Verlag, New York, 2002.

Dit is zeker geen volledige lijst, en er is uiteraard veel overlap tussen deze teksten. Ik raad aan om tenminste twee van deze boeken te bekijken; juist door de verschillen in presentatie wordt je gedwongen zelf aktief over de theorie na te denken.

Om de gedachten te bepalen volgen hier enkele begrippen en resultaten die aan het eind van het semester bekend dienen te zijn. (Je hoeft deze begrippen niet noodzakelijk in deze volgorde te bestuderen.)

— ringen; typisch niet-commutatief en met 1;
— links-/rechts-idealen; tweezijdige idealen; quotientringen;
— het Jacobson radicaal $\mathrm{rad}(R)$;
— links-/rechts-modulen over een ring;
— eindigheidscondities: eindig voortgebrachte modulen, artinse en noetherse ringen;
— simpele modulen, semisimpele modulen; onontbindbare modulen;
— definitie van een semisimpele algebra en van een simpele algebra;
— een simpele ring is semisimpel; een eindig produkt van semisimpele ringen is weer semisimpel;
— als D een delingsring (scheeflichaam) is, dan is voor elke $n \geqslant 1$ de matrixalgebra $M_n(D)$ simpel;
— elke simpele ring is isomorf met een matrixalgebra over een scheeflichaam;
— als A een semisimpele ring is, dan is er een canonieke ontbinding van A als een produkt van simpele ringen;
— een (links-)artinse ring R is semisimpel dan en slechts als $\mathrm{rad}(R) = 0$.
— Belangrijkst van alles, is dat je nadenkt over de betekenis van deze theorie voor de representatietheorie van (eindige) groepen. Zij kG de groepenalgebra van een eindige groep G over een lichaam k. Wanneer is deze algebra semisimpel? Als kG semisimpel is, wat is dan zijn ontbinding als produkt van matrixalgebra's over scheeflichamen? Bekijk voorbeelden! Aan het eind van het semester wordt van je verwacht dat je voor eenvoudige groepen, zoals cyklische groepen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ of diëdergroepen D_n, de hele representatietheorie begrijpt, niet alleen over een algebraïsch afgesloten lichaam zoals $\mathbb{C}$ maar ok bijvoorbeeld over $\mathbb{Q}$.

Ik hou me van harte aanbevolen voor alle opmerkingen en suggesties die betrekking hebben op dit vak. –BM