

ALGEBRA 3, werkcollege 15 november 2007

Opgave 25. Maak uit het boek van Serre de opgave uit § 7.4.

Bestudeer voor volgende week de volgende begrippen uit de groepentheorie: semi-directe product, oplosbare groep, Sylow-ondergroep. Maak verder de opgaven van de vorige werkcolleges die je nog niet gedaan hebt.

Opgave 26. (Alleen voor Mastersstudenten.) Hieronder volgen een aantal uitspraken over algebra's. Zeg van elke bewering of deze waar is of niet. Als je denkt dat een bewering waar is, geef een argument of verwijzing. Als je denkt dat een bewering niet waar is, geef een voorbeeld waaruit de onjuistheid van de bewering blijkt.

- (i) Als A een ring is dan is A semi-simpel dan en slechts dan als de tegengestelde ring A^{opp} semi-simpel is.
- (ii) Een semi-simpele algebra is artins.
- (iii) Zij k een lichaam. Dan is elke semi-simpele k -algebra A isomorf met de groepenring $k[G]$ van een eindige groep.
- (iv) Zij G een eindige groep. Als k een lichaam is, zij n_k het aantal isomorfielassen van irreducibele representaties $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ met V een eindig-dimensionale k -vektorruimte. Dan geldt bij een lichaamsuitbreiding $k \subset K$ dat $n_k \leq n_K$.
- (v) Notatie als in (iv). Als $k = \bar{k}$ dan is $n_k = n_K$.
- (vi) Als A een simpele ring is, dan is A ook simpel als moduul over zichzelf.