ALGEBRA 1—Tien oefenopgaven voor het tentamen.

Motiveer steeds zorgvuldig je antwoorden!

Opgave 1. (UvA, tentamen 1997)

(i) Bepaal het aantal elementen in $\mathrm{Hom}(D_3, \mathbb{C}^*)$ en in $\mathrm{Hom}(D_3, A_4)$.

(ii) Bepaal of de verzamelingen $\mathrm{Hom}\big(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathrm{O}_2(\mathbb{R})\big)$ en $\mathrm{Hom}\big(D_3, \mathrm{O}_2(\mathbb{R})\big)$ eindig zijn of oneindig.

Opgave 2. (UvA, tentamen 2002)

Ter herinnering: (a) De verzameling $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ vormt een groep onder vermenigvuldiging; deze groep noemen we $\mathbb{R}^*$. (b) We schrijven $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ voor de groep van 2×2 matrices A met coëfficiënten in $\mathbb{R}$ en met $\det(A) \neq 0$.

Laat

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R}\,, a \neq 0 \right\} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\,.$$

(i) Toon aan dat G een ondergroep is van $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

(ii) Laat $f\colon G \to \mathbb{R}^*$ de afbeelding zijn die wordt gegeven door $f\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = a$. Toon aan dat f een homomorfisme is.

(iii) Laat

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bewijs dat N een normaaldeler is van G en dat $G/N \cong \mathbb{R}^*$.

(iv) Bepaal alle elementen van G waarvan de orde eindig is.

Opgave 3. We werken in de permutatiegroep S_{15}.

(i) Schrijf de permutatie

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 2 & 11 & 13 & 9 & 5 & 6 & 8 & 14 & 7 & 3 & 1 & 12 & 10 & 15 & 4 \end{bmatrix}$$

als een product van discjuncte cykels. Bepaal de orde en het teken van α.

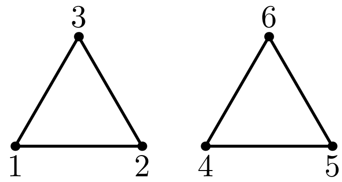
(ii) Laat $\beta := (1\ 2\ 5\ 9\ 15)(3\ 6)(4\ 7)$. Bepaal een element $\sigma \in S_{15}$ zo dat $\alpha\sigma = \sigma\beta$, of bewijs dat zo een σ niet bestaat.

(iii) Bepaal een element $\tau \in S_{15}$ zo dat $\tau^3 = \alpha^7$, of bewijs dat zo een τ niet bestaat.

Opgave 4. Beschouw de ondergroep $G \subset S_6$ bestaande uit alle permutaties $\sigma \in S_6$ die voldoen aan de volgende voorwaarde:

$$\text{of } \begin{cases} \sigma(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\} \\ \sigma(\{4,5,6\}) = \{4,5,6\} \end{cases}, \text{ of } \begin{cases} \sigma(\{1,2,3\}) = \{4,5,6\} \\ \sigma(\{4,5,6\}) = \{1,2,3\} \end{cases}.$$

Anders geformuleerd, gebruik makend van het diagram



geldt dat een permutatie $\sigma \in S_6$ een element is van G, wanneer voor alle i, $j \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ geldt:

$$i \text{ is door een zijde verbonden met } j \quad \Rightarrow \quad \sigma(i) \text{ is door een zijde verbonden met } \sigma(j).$$

Je hoeft niet na te gaan dat G inderdaad een ondergroep is van S_6.

(i) Definieer een afbeelding $f\colon G \to \{\pm 1\}$ door

$$f(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{als } \sigma(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}; \\ -1 & \text{als } \sigma(\{1,2,3\}) = \{4,5,6\}. \end{cases}$$

Toon aan dat f een surjectief homomorfisme van groepen is.

(ii) Bewijs dat $\#G = 72$.

(iii) Bewijs dat G isomorf is met een semidirect product $(S_3 \times S_3) \rtimes_\varphi (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, waarbij je expliciet dient aan te geven wat het homomorfisme

$$\varphi\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(S_3 \times S_3)$$

is.

Opgave 5. (UvA, tentamen 2002)

Zij G een groep van orde 55 met eenheidselement e. Laat

$$X := \{H \subset G \mid H \text{ is een ondergroep van orde } 5\}.$$

Zij $m := \#X$ het aantal ondergroepen van G van orde 5.

(i) Als H_1, $H_2 \in X$ ondergroepen zijn van orde 5, toon aan dat òfwel $H_1 = H_2$, òfwel $H_1 \cap H_2 = \{e\}$.

(ii) Laat zien dat er precies $4m$ elementen van orde 5 zijn in G.

Gegeven is nu dat G *geen* normaaldelers heeft van orde 5. We laten G werken op de verzameling X door conjugatie; dus $g \in G$ stuurt $H \in X$ naar $gHg^{-1} \in X$.

(iii) Laat $H \in X$. Zij $G_H \subset G$ de stabilisator van H onder de gegeven werking. Laat zien dat $H \subseteq G_H \subsetneq G$. Concludeer dat $H = G_H$ en dat $m = 11$.
(iv) Hoeveel elementen van orde 11 heeft G ? Motiveer je antwoord.

Opgave 6. (UL, tentamen 2004)
Stel n is een geheel getal zo dat

$$2^7 \equiv 2 \bmod n \qquad \text{en} \qquad 3^7 \equiv 3 \bmod n\,.$$

Bewijs dat voor alle gehele getallen a geldt dat $a^7 \equiv a \bmod n$.

Opgave 7. Gegeven is een eindige groep G die transitief werkt op een verzameling X met $\#X \geq 2$. Bewijs dat er een element $g \in G$ bestaat dat geen enkel vast punt heeft, d.w.z., zo dat voor alle $x \in X$ geldt dat $g \cdot x \neq x$.

Opgave 8. Zij n een natuurlijk getal. Als a, b gehele getallen zijn zo dat $\mathrm{ggd}(a, n) = 1$, definieer een afbeelding $\sigma_{a,b}\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ door

$$\sigma_{a,b}(i) = \text{de unieke } j \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ zo dat } ai + b \equiv j \bmod n.$$

(i) Bewijs dat $\sigma_{a,b}$ een permutatie van $\{1, 2, \ldots, n\}$ is.
(ii) Laat
$$G := \left\{\sigma_{a,b} \;\middle|\; a,\, b \in \mathbb{Z} \text{ en } \mathrm{ggd}(a, n) = 1\right\}.$$
Toon aan dat G een ondergroep is van S_n.
(iii) Bewijs dat G orde $n \cdot \varphi(n)$ heeft. (Hierbij is φ de Euler phi functie, dus $\varphi(n)$ is de orde van $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.)
(iv) Zij $\psi\colon (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \to \mathrm{Aut}\big(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\big)$ het homomorfisme dat $k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ stuurt naar het automorfisme $[k]\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gegeven door $(i \bmod n) \mapsto (ki \bmod n)$. Je hoeft niet na te gaan dat ψ inderdaad een homomorfisme is. Bewijs dat $G \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rtimes_\psi (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

Opgave 9. (UvA, tentamen 2002)
Zij G een eindige groep en zij $\mathbb{Q}$ de optelgroep der rationale getallen.
(i) Bewijs: ieder homomorfisme van G naar $\mathbb{Q}$ is triviaal.
(ii) Bewijs: ieder homomorfisme van $\mathbb{Q}$ naar G is triviaal.

Opgave 10. Bepaal de laatste twee cijfers (in decimale schrijfwijze) van het getal $7^{77^{777}}$.
NB: a^{b^c} is $a^{(b^c)}$ en niet $(a^b)^c$.