

Algebra 1, aanvulling bij Hoofdstuk 6. Een element π van de permutatiegroep S_n kunnen we noteren als

$$\pi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \cdots & \pi(n) \end{bmatrix}.$$

Bijvoorbeeld: met $n = 7$ hebben we

$$(*) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 7 & 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

De inverse van een permutatie krijg je door “van onder naar boven te lezen”; bijvoorbeeld

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Stelling (6.4) zegt dat we elke permutatie ook kunnen schrijven als product van disjuncte cyclen. Het is nuttig om een aantal keren te oefenen met het “vertalen” tussen de bovenstaande notatie en de cykel-notatie. Bijvoorbeeld, uitgeschreven in cyclen wordt (*):

$$(1\ 3\ 7\ 4)(2\ 6\ 5) \circ (3\ 4\ 7) = (1\ 3)(2\ 6\ 5).$$

Laat $\pi \in S_n$. Bekijk paren indices $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$ met $i < j$. We zeggen dat (i, j) een *inversie* is van π als $\pi(i) > \pi(j)$. Laat $I(\pi)$ het aantal van dergelijke inversies zijn. We definiëren de afbeelding

$$\varepsilon: S_n \longrightarrow \{\pm 1\}$$

door $\varepsilon(\pi) = (-1)^{I(\pi)}$. Het is niet zo moeilijk na te gaan dat dit equivalent is met de definitie als in (6.5) van de syllabus. (Zie Opgave VI.10.) Met deze definitie van het teken geven we een ander bewijs van (6.6).

(6.6) Propositie. De afbeelding $\varepsilon: S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ is een homomorfisme. Als $n \geq 2$ dan is ε surjectief.

Bewijs. Laat $\pi, \sigma \in S_n$. Gegeven indices i en j met $1 \leq i < j \leq n$ zijn er vier mogelijkheden:

- (a) $\pi(i) < \pi(j)$ en $\sigma\pi(i) < \sigma\pi(j)$;
- (b) $\pi(i) < \pi(j)$ en $\sigma\pi(i) > \sigma\pi(j)$;
- (c) $\pi(i) > \pi(j)$ en $\sigma\pi(i) < \sigma\pi(j)$;
- (d) $\pi(i) > \pi(j)$ en $\sigma\pi(i) > \sigma\pi(j)$.

Laat $n(a)$ het aantal paren (i, j) zijn met $1 \leq i < j \leq n$ waarvoor (a) geldt; analoog voor $n(b)$, $n(c)$ en $n(d)$. Dan is

$$I(\pi) = n(c) + n(d), \quad I(\sigma) = n(b) + n(c), \quad \text{en} \quad I(\sigma\pi) = n(b) + n(d).$$

Dus

$$\varepsilon(\sigma\pi) = (-1)^{n(b)+n(d)} = (-1)^{n(b)+n(c)} \cdot (-1)^{n(c)+n(d)} = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\pi),$$

hetgeen bewijst dat ε een homomorfisme is.

Tenslotte bewijzen we dat ε surjectief is als $n \geq 2$. Merk allereerst op dat $\varepsilon(\text{id}) = 1$. Als $n \geq 2$ dan bevat S_n de verwisseling $\pi = (1\ 2)$. Maar dan is $I(\pi) = 1$, zodat $\varepsilon(\pi) = -1$; dus ε is surjectief.