Algebra 1 — Aanvullende opgaven

Opgave AO1. Laat zien dat $\mathrm{ggd}(39, 1003) = 1$. Bepaal de inverse van $\overline{39}$ in de groep $(\mathbb{Z}/1003\mathbb{Z})^*$.

Opgave AO2.
(i) Beschrijf alle elementen van orde ≤ 4 in de groep $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$.
(ii) Voor welke natuurlijke getallen n bestaat er in de groep $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ een element van orde n ?

Opgave AO3. Voor $a \in \mathbb{Z}$, schrijf $\overline{a} = (a \bmod 157) \in (\mathbb{Z}/157\mathbb{Z})$. Beschouw:

$$\overline{17}\,, \quad \overline{-768}\,, \quad \overline{51}\,, \quad \overline{1744}\,, \quad \overline{100}\,, \quad \overline{-57}\,.$$

Hoeveel verschillende elementen van $(\mathbb{Z}/157\mathbb{Z})$ staan hier?

Opgave AO4. Hier volgt een lijst van verzamelingen G met daarop een bewerking $\circ$. Ga bij elk van deze voorbeelden na, aan welk van de axioma's (G1), (G2), (G3) en (G4) uit Definities (3.1) en (3.2) is voldaan.
(i) $G = \mathbb{N}$ met bewerking $a \circ b = a^b$.
(ii) $G = \mathbb{R}_{>1}$ met bewerking $a \circ b = a^{\log b}$.
(iii) $G = \mathbb{N}$ met bewerking $a \circ b = \max\{a, b\}$.
(iv) $G = \mathbb{R}$ met bewerking $a \circ b = a + b - 3$.

Opgave AO5. (Naar Sam Loyd, Amerikaans puzzelexpert, 1841–1911.)
(i) Vijftien blokjes, genummerd van 1 tot en met 15 liggen in een doosje zoals hieronder afgebeeld. De zestiende plaats is leeg. Het is de bedoeling dat men zo met de blokjes schuift dat ze in de juiste volgorde komen te liggen (dus met 14 en 15 verwisseld). Kan dit?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

(ii) Nu spelen we hetzelfde spel met letters. In de puzzel hieronder moet “wta” gecorrigeerd worden tot “wat”. Kan dit?

d	e	n	k
o	f	s	c
h	u	i	f
w	t	a	

Opgave AO6. Als G en H groepen zijn, dan schrijven we $\mathrm{Hom}(G,H)$ voor de verzameling van alle homomorfismen van G naar H.

(i) Zij G een groep. Bewijs dat de afbeelding $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},G) \to G$ die aan een homomorfisme $f\colon \mathbb{Z} \to G$ het element $f(1) \in G$ toevoegt, een bijectie is.

(ii) Als $f\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to G$ een homomorfisme is, bewijs dat de orde van het element $f(\bar{1}) \in G$ een deler is van n.

(iii) Als $g \in G$ een element is waarvan de orde een deler is van n, bewijs dat er een uniek bepaald homomorfisme $f\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to G$ is zo dat $f(\bar{1}) = g$. Concludeer dat er een bijectie is tussen $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},G)$ en de verzameling $\{g \in G \mid \mathrm{orde}(g)|n\}$.

Opgave AO7. Bekijk de groepen $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ met $m \in \{7,8,9\}$. Welke van deze groepen zijn cyklisch?

Opgave AO8. Zij G een groep. Als g, $h \in G$ dan heet het element $[g,h] := ghg^{-1}h^{-1}$ de *commutator* van g en h. De ondergroep voortgebracht door alle commutatoren heet de *commutatorondergroep* van G en wordt genoteerd met $[G,G]$.

(i) Laat zien dat $[G,G] = \{e\}$ dan en slechts dan als G abels is.

(ii) Bereken $[A_n,A_n]$ voor $n \leq 4$.

(iii) Bereken de commutator van $g = (1\,2\,4)$ en $h = (1\,3\,5)$ in A_n voor $n \geq 5$.

(iv) Bewijs dat $[A_n,A_n] = A_n$ als $n \geq 5$. Bewijs ook dat $[S_n,S_n] = A_n$ voor alle $n \geq 5$.

(v) Zij $n \geq 5$. Bepaal alle homomorfismen $A_n \to \mathbb{C}^*$ en alle homomorfismen $S_n \to \mathbb{C}^*$.

Opgave AO9.

(i) Als G_1 en G_2 groepen zijn, bewijs dat $N := \{e_1\} \times G_2$ een normaaldeler is van $G_1 \times G_2$ en dat $(G_1 \times G_2)/N \cong G_1$.

(ii) Stel G is een eindige groep, N is een normaaldeler van G, zo dat N en G/N allebei niet-abels zijn. Laat zien dat $\#G \geq 36$, en geef een voorbeeld met $\#G = 36$.

Opgave AO10. We werken in de permutatiegroep S_n.

(i) Als $\sigma = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_k)$ een k-cykel is en $\tau \in S_n$, laat zien dat

$$\tau\sigma\tau^{-1} = \big(\tau(a_1)\ \tau(a_2)\ \cdots\ \tau(a_k)\big)\,.$$

(ii) Laat zien dat twee elementen van S_n geconjugeerd zijn dan en slechts dan als ze hetzelfde cykeltype hebben.

(iii) Hoeveel elementen zijn er in S_{12} die cykeltype $\{1,4,7\}$ hebben? En hoeveel met cykeltype $\{2,5,5\}$?

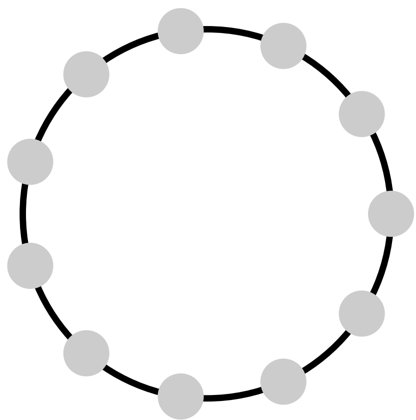
(iv) Als $\sigma \in S_{12}$, laat $C_\sigma := \{\tau \in S_{12} \mid \sigma\tau = \tau\sigma\}$. Hoeveel elementen heeft C_σ als

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 6 & 5 & 11 & 8 & 12 & 7 & 4 & 10 & 3 & 9 & 1 \end{bmatrix} ?$$

En hoeveel als

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 3 & 12 & 5 & 4 & 8 & 11 & 10 & 1 & 7 & 6 & 9 \end{bmatrix} ?$$

Opgave AO11. (Maak eerst opgave VIII.7 uit de syllabus.) Je hebt m kleuren kralen. Van elke kleur heb je een ongelimiteerd aantal. Hoeveel verschillende kralenkettingen kun je maken met 11 kralen?



(N.B.: Een kralenketting is een ruimtelijk voorwerp.)

Opgave AO12. Zij $\pi\colon G \to H$ een homomorfisme van groepen. Een homomorfisme $s\colon H \to G$ heet een *snede van* π als $\pi \circ s = \mathrm{id}_H$.

(i) Laat zien dat er alleen een snede van π kan bestaan als π surjectief is. Laat ook zien dat een snede s noodzakelijk injectief is.

(ii) Geef een snede van het homomorfisme $\det\colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$.

(iii) Geef een snede van het teken-homomorfisme $\epsilon\colon S_n \to \{\pm 1\}$, voor $n > 1$.

(iv) Zij Q de quaterniongroep van orde 8. Het centrum van Q is de ondergroep $\{\pm 1\}$. Laat zien dat er geen snede bestaat van de canonieke afbeelding $Q \to Q/\{\pm 1\}$.

Opgave AO13.

(i) Laat zien dat $Z(S_4) = \{\mathrm{id}\}$ en concludeer dat $S_4 \cong \mathrm{Inn}(S_4)$.

(ii) Zij φ een automorfisme van S_4. Als $\sigma \in S_4$, laat zien dat σ en $\varphi(\sigma)$ hetzelfde cykeltype hebben. Concludeer dat φ de drie elementen

$$\alpha_1 := (1\,2)(3\,4)\,, \quad \alpha_2 := (1\,3)(2\,4) \qquad \text{en} \qquad \alpha_3 := (1\,4)(2\,3)$$

onderling permuteert. Dit geeft een homomorfisme $\rho\colon \mathrm{Aut}(S_4) \to S_3$.

Als $\sigma = (a\,b)$ een 2-cykel in S_4 is, dan schrijven we σ' voor de complementaire 2-cykel; hiermee bedoelen we de unieke 2-cykel $\sigma' = (c\,d)$ zo dat $\{1, 2, 3, 4\} = \{a, b, c, d\}$. (Dus $(1\,3)' = (2\,4)$, etc.) Merk op dat σ' de unieke 2-cykel $\neq \sigma$ is die commuteert met σ.

(iii) Laat zien dat voor alle 2-cykels $\sigma \in S_4$ geldt dat $\varphi(\sigma') = \varphi(\sigma)'$.

(iv) Als $\varphi \in \mathrm{Ker}(\rho)$, laat zien dat voor alle 2-cykels σ geldt dat ofwel $\varphi(\sigma) = \sigma$, ofwel $\varphi(\sigma) = \sigma'$.

(v) Toon aan dat $\#\mathrm{Ker}(\rho) \leq 4$. [*Hint:* gebruik conjugatierelaties zoals $(1\,3)(1\,2)(1\,3) = (2\,3)$.]

(vi) Bewijs dat $\mathrm{Aut}(S_4) = \mathrm{Inn}(S_4) \cong S_4$.