Waar of niet waar?

Zijn de volgende beweringen waar of niet? Licht je antwoord steeds toe met een bewijs of een voorbeeld.

(1) Als n een natuurlijk getal is dan is $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ cyklisch.

(2) Als R een domein is en $x \in R$ is een irreducibel element dan is $(x) \subset R$ een priemideaal.

(3) Zijn f, $g \in \mathbb{Q}[X]$ irreducibele polynomen van dezelfde graad. Dan zijn de lichamen $\mathbb{Q}[X]/(f)$ en $\mathbb{Q}[X]/(g)$ isomorf.

(4) Zij K een lichaam. Als $R \subset K$ een deelring is met $1 \in R$ dan is R een domein.

(5) Zijn f, $g \in \mathbb{Z}[X]$ met $g \neq 0$, dan zijn er q, $r \in \mathbb{Z}[X]$ met $f = q \cdot g + r$ en $r = 0$ of $\deg(r) < \deg(f)$.

(6) Zij R een commutatieve ring. Als f, $g \in R[X]$ polynomen zijn, beide niet nul, dan is $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$.

(7) Zij R een commutatieve ring. Als $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ een eenheid is in $R[X]$ dan is $f = a_0$ een constant polynoom en $a_0 \in R^*$.

(8) Laat $f \in \mathbb{Z}[X]$ een primitief polynoom zijn. Dan is f irreducibel in $\mathbb{Z}[X]$ dan en slechts dan als f irreducibel is in $\mathbb{Q}[X]$.

(9) Stel $K \subset L \subset M$ zijn lichaamsuitbreidingen, $\alpha \in M$ is algebraïsch over L en L is algebraïsch over K. Dan is α algebraïsch over K.

(10) De lichamen $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ hebben hetzelfde priemlichaam.

(11) Een deelring van een niet-commutatieve ring is zelf ook niet-commutatief.

(12) Zij $\alpha \in \mathbb{C}$. Dan is er een $f \in \mathbb{R}[X]$ met $f(\alpha) = 0$.

(13) De lichamen $\mathbb{Q}(\pi)$ en $\mathbb{Q}(e)$ zijn isomorf. (NB: $\pi = 3,1415\ldots$ en $e = 2,71828\ldots$ zijn de gebruikelijke constanten.)

(14) Zij K een lichaam. Als $f \in K[X]$ een irreducibel polynoom is van graad $d > 0$ en $K \subset L$ is een ontbindingslichaam van f over K dan is $[L : K] = d$.

(15) De ring $\mathbb{C}[X]$ heeft oneindig veel priemidealen.

(16) Als $R_1 \subset R_2$ een deelring is en $I \subset R_2$ is een hoofdideaal dan is $R_1 \cap I$ een hoofdideaal van R_1.

(17) Zij K een lichaam, en zij $M_n(K)$ de ring van $n \times n$ matrices met coëfficiënten in K. Dan heeft $M_n(K)$ geen nuldelers.

(18) Een lichaam met oneindig veel elementen heeft karakteristiek nul.

(19) Zij $\mathbb{Q} \subset K$ een uitbreiding van graad 6. Als $\alpha \in K$ en $\alpha \notin \mathbb{Q}$ dan heeft het minimumpolynoom van α over $\mathbb{Q}$ graad 6.

(20) Idem, maar nu met $[K : \mathbb{Q}] = 7$.