

“D’autres ont supposé que, par des actes brusques, l’animal trouvait un appui sur la résistance de l’air.” M. M

# Ijkvelden voor een vallende

**Wij beschrijven een model voor een vallende kat<sup>1</sup> dat blijkt te corresponderen met een *ijktheorie*, analoog aan Maxwells theorie van het elektromagnetisme. Er bestaat een analogie tussen de beweging van een vallende kat en die van een elektrisch geladen deeltje op een boloppervlak, waarbij zich in het centrum een magnetische monopool bevindt. De theorie blijkt een aantal kwalitatieve aspecten van de val van de kat goed te beschrijven, maar voor een natuurgetrouwe beschrijving van de val is een uitbreiding van het model noodzakelijk.**

Bernard Kaas, Boaz v.d. Plas, Vincent Stiekema, Michel Taal

Het is een spreekwoordelijke vanzelfsprekendheid dat vallende katten altijd op hun pootjes terecht komen. Dankzij het pionierswerk van een Franse fotograaf rond 1900 [1] werd echter duidelijk welke handelingen een kat achtereenvolgens, tijdens zijn val, dient te verrichten om op zijn pootjes terecht te komen. Die fotoserie (maar ook de hedendaagse versie (figuur 1)) liet niet alleen zien dat de fotografie de wetenschappelijke waarneming aanzienlijk kon verrijken, maar ontketende ook een discussie over dit markante verschijnsel onder fysici. Het gaat hierbij om de mechanica van *deformeerbare* lichamen, dit in tegenstelling tot die van de *starre* lichamen — zoals bakstenen, tollens e.d. — waarmee de meeste lezers vertrouwd zullen zijn. In algemene zin beschouwen we een dynamisch systeem waarbij het centrale object zelf controle heeft over een aantal parameters die de beweging beïnvloeden; daarmee hoort het probleem ook thuis in de *regeltheorie*.

## STAR LICHAAM

In ons model worden voor- en achterlichaam van de kat gerepresenteerd door twee (starre) homogene cilinders, die verbonden worden door een massaloze ruggengraat (zie figuur 2). De cilinders kunnen onafhankelijk om hun lengteas draaien en de ruggengraat kan halverwege doorbuigen, zodat de cilinders zich onafhankelijk kunnen oriënteren in de ruimte. Merk op dat staart en poten niet als aparte vrijheidsgraden in het model zijn opgenomen, d.w.z. ze zijn niet meer dan gemarkeerde punten op de cilinders. Alvorens de kinematica van dit model te bespreken, brengen we enige basisbegrippen uit de mechanica van een star lichaam in de herinnering. De rotationele beweging van een willekeurig star lichaam wordt beschreven met behulp van een constante traagheidstensor, die afhankelijk is van de (vaste) vorm van het lichaam. Deze tensor is een orthogonale  $3 \times 3$ -matrix die door een orthogonale rotatie  $\Omega$  in diagonaalvorm (op hoofdassen) kan worden gebracht. We kunnen de beweging dus beschrijven als de beweging van de hoofdassen in de tijd, anders gezegd door de rotatiematrix  $\Omega(t)$ . De configuratieruimte voor de rotatiebeweging van

een star lichaam is dus driedimensionaal en komt overeen met de ruimte van alle rotaties. Deze ruimte komt overeen met een 3-dimensionaal boloppervlak, waarbij tegenoverliggende punten geïdentificeerd zijn (oftewel de rotatiegroep  $SO(3)$  die op handige wijze geparametriseerd kan worden door de bekende Eulerhoeken<sup>2</sup>).

## PIROUETTE

Een vrij vallend star lichaam kan zijn oriëntatie in de ruimte niet beïnvloeden, deze wordt door de beginvoorwaarden vastgelegd omdat impulsmoment behouden is. Een modelkat die uit een enkele cilinder bestaat komt daarom hoogst zelden op zijn pootjes terecht en is dus ten dode opgeschreven. Ons deformeerbare model heeft een variabele traagheidstensor die afhankelijk is van de knik (d.w.z. de hoek  $\theta$ ) in de ruggengraat. Doordat de kat zelf door variatie van  $\theta$  z'n vorm op een gecontroleerde wijze kan veranderen, kan hij op die manier zijn rotatiebeweging beïnvloeden. Dit is analoog aan een ballerina die bij een “pirouette” sneller gaat draaien doordat ze haar armen intrekt, en zo de afname van haar traagheidsmoment compenseert met een toename van haar hoeksnelheid, zodat impulsmoment behouden blijft. Een belangrijk voordeel van het in de figuur 2 aangegeven coördinatenstelsel<sup>3</sup> is dat de totale traagheidstensor weer een diagonale  $3 \times 3$ -matrix is.

<sup>1</sup> Eerder bestudeerd in referentie [3] volgend op de suggestie van Shapere en Wilczek [2]

<sup>2</sup> deze ruimte komt overeen met een 3-dimensionaal boloppervlak, waarbij tegenoverliggende punten geïdentificeerd zijn  
<sup>3</sup> ook wel het coördinatenstelsel van Kane en Scher genoemd

# kat

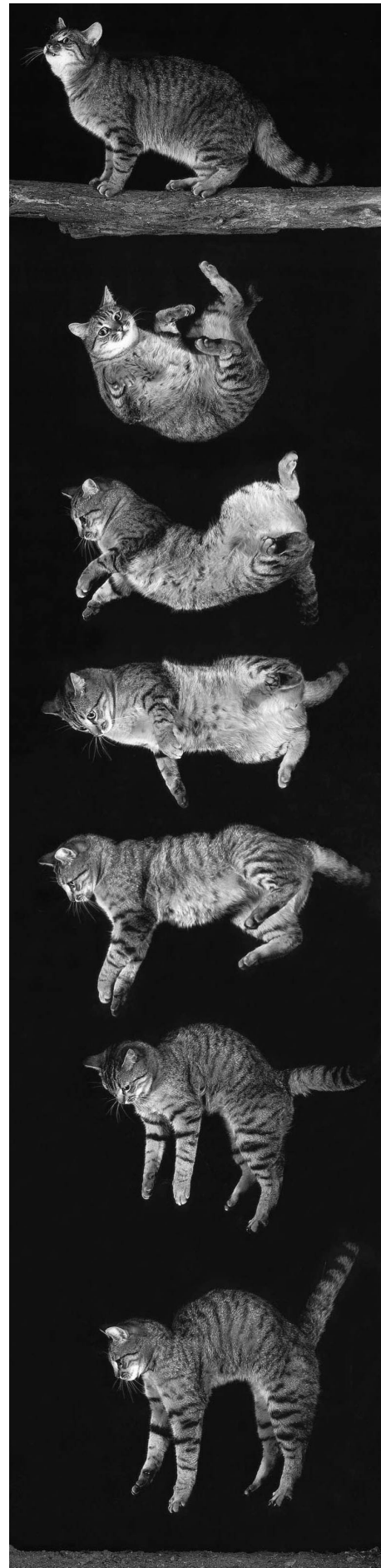
## ZESDIMENSIONALE RUIMTE

De totale configuratieruimte van het model komt overeen met die van twee onafhankelijke cilinders, d.w.z. een zesdimensionale ruimte die je kunt voorstellen als de productgroep  $SO(3)_v \times SO(3)_a$  die de oriëntatie van de voorste en achterste cilinder beschrijven. We kunnen echter ook op een andere, meer inzichtelijke, manier kijken naar de totale configuratieruimte, waarbij we deze splitsen in een vormen- en een oriëntatieruimte. De vormenruimte van de kat is ook weer driedimensionaal en wordt (zie figuur 2) geparametriseerd door de twee hoeken  $\phi_v$  en  $\phi_a$  voor de draaiing van de cilinders om hun as en één, de hoek  $\theta$ , voor de knik van de ruggengraat. De drie resterende parameters leggen de oriëntatie in de fysische ruimte van de gehele kat, met een gegeven vorm, vast. Deze oriëntatieruimte is, net zoals die van een star lichaam, isomorf met de rotatiegroep. Kortom, we hebben de totale configuratieruimte opgesplitst in een driedimensionale controle- of vormenruimte, die de vorm van de kat beschrijft en die de kat kan controleren, en een driedimensionale oriëntatieruimte, die de oriëntatie van de kat in de ruimte beschrijft.

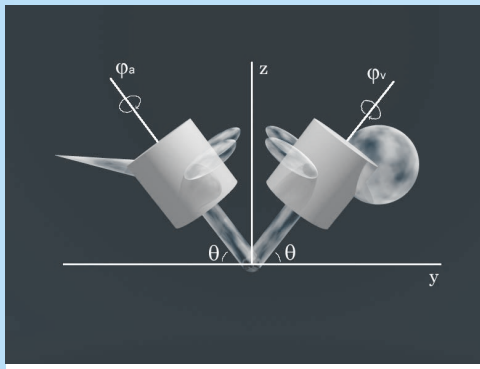
Als we de configuratieruimte op deze manier opsplitsen, krijgt deze de structuur van een vezelbundel waarbij één vezel bestaat uit alle mogelijke oriëntaties die bij één vorm horen (zie figuur 3). Men kan zich nu voorstellen dat een gesloten pad in de vormenruimte — wat betekent dat de kat uiteindelijk in zijn oorspronkelijke vorm terugkeert — samen kan gaan met een open pad in de configuratieruimte waarbij begin- en eindpunt verschillende punten op dezelfde vezel zijn.

Dit houdt in dat de kat een netto rotatie (welke beschreven wordt door de hoek  $\phi$  die gedefinieerd is als  $\phi_a - \phi_v$ ) ondergaan heeft, die idealiter gelijk is aan 180 graden. De kat begint dan met gestrekte rug en z'n pootjes omhoog en eindigt met gestrekte rug en z'n pootjes naar de grond.

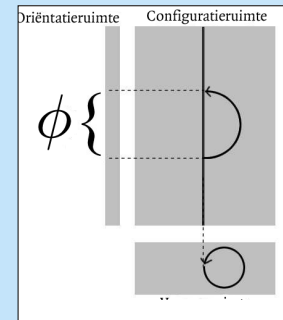
Net zoals voor een star lichaam de Hamiltoniaan een natuurlijke en eenvoudige vorm aanneemt als we gebruik maken van de meetkundige eigenschappen van de rotatiegroep (d.w.z. het gebruik van Eulerhoeken) en de diagonaalvorm van de traagheidstensor, geldt iets soortgelijks voor onze vallende kat. We kunnen, na de conditie van impulsmomentbehoud opgelegd te hebben, een natuurlijke Hamiltoniaan voor ons model opstellen. Deze beschrijft in feite de beweging van een niet-abelse lading op een driedimensionale bol in een extern Yang-Mills-veld. Wanneer we dan ook nog de beperking opleggen dat de kat zijn rug niet mag torderen, d.w.z. dat de cilinders in ons model niet tegen elkaar in mogen draaien, leidt dat tot een verdere vereenvoudiging. De resulterende Hamiltoniaan (zie appendix, formule 1), heeft dezelfde vorm als die van een geladen deeltje dat op een (gedeformeerd) tweedimensionaal boloppervlak beweegt, in een extern magnetisch veld gegeven door de vectorpotentiaal  $A$  (zie Appendix, formule 2). Voor ons model van de kat blijkt  $A$  gegeven door vergelijking (3), corres-



Figuur 1  
De val van een echte kat.  
Een soortgelijke opname is rond 1900 gemaakt.



Figuur 2 De hoeken beschrijven de vorm van de kat en de cartesische coördinaten beschrijven de ruimtelijke oriëntatie van het dier.



Figuur 3 De kat kan een gesloten pad in de vormenruimte afleggen, terwijl in de configuratieruimte geen gesloten pad wordt gevolgd. Dit heeft een rotatie tot gevolg in de oriëntatieruimte, waardoor de kat zijn ruimtelijke oriëntatie kan beïnvloeden.

## Appendix

De Hamiltoniaan van het model na invoering van alle restricties:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left\{ I_1^{-1} p_\theta^2 + \frac{I_3}{\sin^2 \theta} \left( p_\phi - \frac{\alpha \cos \theta}{2I_3} q_2 \right)^2 \right\} \quad (1)$$

Hierbij zijn  $I_1$  en  $I_3$  de traagheidsmomenten van de gehele kat om de assen in de vormenruimte, deze hangen zelf ook weer van  $\theta$  af en van de componenten van de traagheidstensor van de cilinders, dit laatste geldt ook voor de parameter  $\alpha$ .

Algemene Hamiltoniaan voor een deeltje met lading  $q$  in een extern ijkveld  $\mathbf{A}$  is:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_i [p_i + qA_i]^2. \quad (2)$$

De enige component van de vectorpotentiaal ongelijk aan nul is:

$$A_\phi = -\frac{\alpha \cos \theta}{2I_3}. \quad (3)$$

Deze geeft dus een  $\theta$ -afhankelijke verdeling van een radiële magnetische flux.

Formule voor het product  $\Phi$  van lading en flux omvat door de baan op de bolschil:

$$\Phi = q_2 \oint A_\phi d\phi = (2n + 1)\pi, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (4)$$

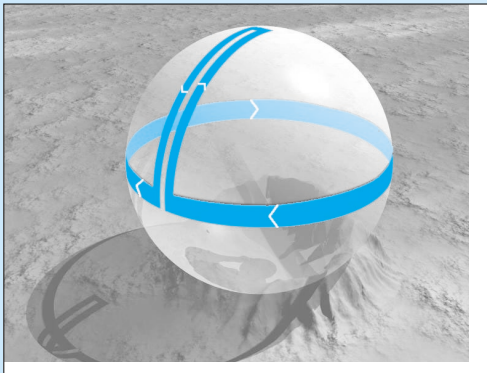
Merk op dat het resultaat invariant is onder de ijktransformaties:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\Lambda. \quad (5)$$

ponderend met een niet isotroop, “radieel” magnetisch veld. De vorm van de potentiaal laat zien dat het achtergrond-ijkveld bij dit soort problemen niet noodzakelijkerwijs aan de Maxwell- (c.q. Yang-Mills-) vergelijkingen hoeft te voldoen; deze vergelijkingen maken geen deel uit van het systeem. Het feit dat dit model een beschrijving heeft waarin ijkvelden een belangrijke rol spelen, is een direct gevolg van de vezelbundelstructuur van de configuratieruimte, die daarvoor de geëigende meetkundige voorstelling zijn.

### BANEN OP EEN BOLSCHIL

Dankzij deze analogie kunnen de bewegingen van de kat geanalyseerd worden als waren het banen van een geladen deeltje op een bolschil. De eenvoudigste baan op de bol bijvoorbeeld is een geodeet (een cirkel met een maximale omtrek). Deze baan (zie figuur 4) kan vertaald worden naar een beweging van de kat. Als we dit geval uitwerken, komen we tot een valbeweging van de kat zoals weergegeven in figuur 5. De kat begint gestrekt met zijn buik naar boven gericht. Hij vouwt zich vervolgens dubbel en draait zijn boven en onderlichaam 180 graden in dezelfde richting, zodat het impulsmoment inderdaad behouden blijft. Vervolgens vouwt hij weer uit en komt hij met zijn pootjes op de grond terecht. Ingewikkeldere, natuurlijkere



**Figuur 4** De eenvoudige oplossing voor de kat om op zijn poten terecht te komen. Het pad begint boven op de bol en de paden van en naar de evenaar liggen in werkelijkheid over elkaar. De omvatte flux is voor dit pad gelijk aan pi.

oplossingen kunnen numeriek verkregen worden.

Interessant is dat uit het model een generiek (kinematisch) resultaat volgt voor de netto rotatie die de kat heeft uitgevoerd wanneer hij een gesloten pad in de vormenruimte heeft afgelegd. Deze hoek is gelijk aan het product van de lading en de totaal door het gesloten pad omvatte magnetische flux. De eis dat onder de opgelegde condities de kat dus op zijn pootjes terecht komt, leidt tot een kwantisatieconditie (zie appendix, formule 5), die doet denken aan de fluxkwantisatie in een type-II-supergeleider. Een andere analogie die zich opdringt is dat in dit klassieke systeem de rotatiehoek gelijk is aan de Aharonov-Bohm-faseverschuiving die bij het gelijknamige quantummechanische effect optreedt. Tot zover deze theoretisch beschrijving van de heroriëntatie van een deformebaar lichaam in de ruimte. De oplossingen geven een mogelijke strategie voor een kat om zich om te draaien tijdens zijn val. Wanneer wij nu als rechtgeaarde empiristen de val van een echte kat (figuur 1) bestuderen, blijkt dat ons model tekort schiet. Het blijkt dat de kat intensief gebruik maakt van zijn staart, en ook een lichte “twist” uitvoert. Deze bevindingen vragen om een uitbreiding van ons model, hoewel we op grond van het model wel verwachten dat een echte kat zonder

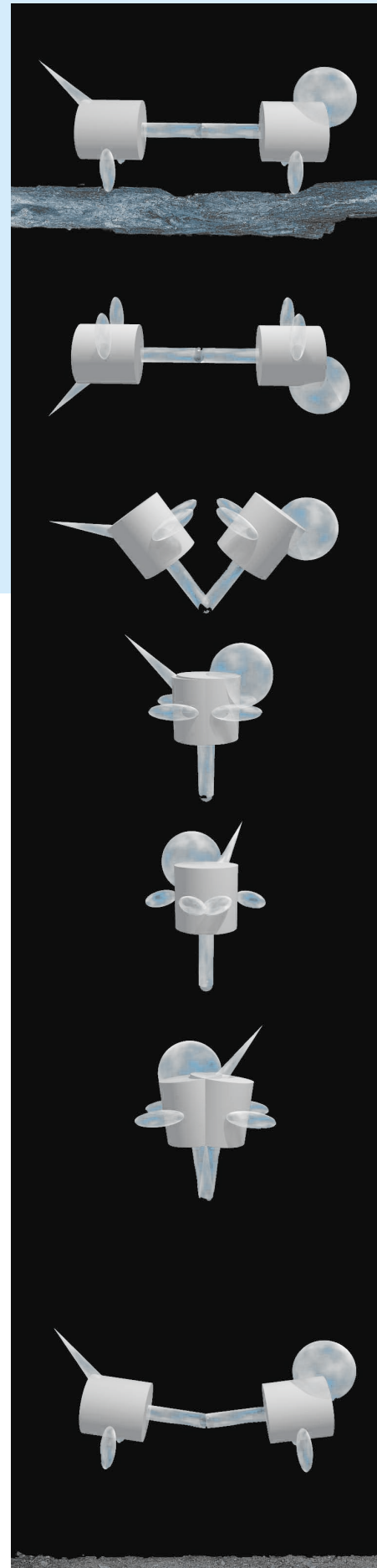
staart ook op zijn pootjes terecht zal komen. Ook verwachten we dat voor een uitgebreid model de vezelstructuur van de configuratieruimte, en daarmee de analogie met een ijktheorie, zal blijven bestaan. Er moeten dus nog de nodige katten uit boom gekeken worden...

#### OVER DE AUTEURS

De auteurs zijn natuurkundestudenten aan de Universiteit van Amsterdam; het hier beschreven werk was een keuzeproject dat onder begeleiding van prof. F.A. Bais uitgevoerd werd aan het eind van het tweede studiejaar. Een uitgebreide beschrijving (met aanzienlijk meer formules) is te vinden op het web [4].

#### REFERENTIES

- 1 M. Marey, *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris*, 1894.
- 2 A. Shapere & F. Wilczek, *Gauge Kinematics of Deformable Bodies, Am.J.Phys.* **57**, 514-518, 1989.
- 3 R. Montgomery, *Gauge Theory of the Falling Cat, Field Institute Communications* **1**, 75 - 111, 1993
- 4 <http://www.science.uva.nl/research/itf/kat.html>.



**Figuur 5** De beweging van het model bij de eenvoudige oplossing. De kat begint hier staand op een tak om de val beter te vergelijken met figuur 1. Eerst klapt de kat in, vervolgens draaien de cilinders tegen elkaar in, om tenslotte in de gewenste stand weer uit te klappen.