Verkeersstromen, files en schokgolven

February 9, 2007

Model

We beschouwen een model voor rijdende auto's op een stuk weg zonder op- en afritten. De weg wordt gegeven door een coordinaat in $\mathbb{R}$. Het onderweg niet kunnen verdwijnen van de auto's levert een behoudswet

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx = \phi(a,t) - \phi(b,t)$$

op intervallen $[a,b]$. Hier is $u(x,t)$ een functie die de dichtheid van auto's (aantal auto's per lengte eenheid) weergeeft. De functie ϕ is de flux, aantal auto's dat een punt per tijdseenheid passeert. Er volgt

$$\int_a^b u_t(x,t)dx = -\int_a^b \phi_x(x,t)dx,$$

dus

$$u_t + \phi_x = 0.$$

De flux ϕ is gelijk aan het product uv van dichtheid keer snelheid. Als modelaanname nemen we een lineair verband tussen snelheid en dichtheid:

$$v = v_1 - \frac{v_1}{u_1}u,$$

voor $0 \leq u \leq u_1$. Bij maximale dichtheid u_1 staat het verkeer stil, de snelheid is begrensd door v_1. Invullen geeft de partiële differentiaalvergelijking

$$u_t + v_1(1 - \frac{2}{u_1}u)u_x = 0.$$

Oplossen met karakteristieken

We laten vervolgens zien hoe zo'n vergelijking op te lossen. Schrijf de vergelijking als

$$u_t + c(u)u_x = 0,$$

en beschouw begincondities

$$u(x,0) = u_0(x).$$

De vergelijking wordt bekeken voor $-\infty < x < \infty$ en $t > 0$.

Langs een kromme $(x(t), t)$ krijgen we voor $u(x(t), t)$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(x(t), t) &= u_t(x(t), t) + \dot{x}(t) u_x(x(t), t) \\ &= u_t(x(t), t) + c(u(x(t), t)) u_x(x(t), t) \\ &= 0, \end{aligned}$$

als we kiezen

$$\dot{x}(t) = c(u(x(t), t))!$$

Deze keuze is slim: we krijgen nu dat u constant is langs de kromme $(x(t), t)$. Dus kunnen we ook schrijven

$$\dot{x}(t) = c(u_0(x_0)), \qquad x(0) = x_0$$

Deze krommen heten karakteristieken.

Schokgolven

We staan ook oplossingen toe die een discontinuïteit hebben langs een kromme $(x_s(t), t)$; een schokgolf. Buiten de schokgolf is voldaan aan de differentiaalvergelijking. Om te bepalen hoe een en ander er uit ziet, keren we terug naar de behoudswet in integraalvorm. Laat $a < x_s(t) < b$ en schrijf

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_a^{x_s(t)} u(x, t) dx + \frac{d}{dt} \int_{x_s(t)}^b u(x, t) dx = \phi(a, t) - \phi(b, t).$$

Werk de afgeleide uit:

$$\int_a^{x_s t} u_t(x, t) dx + \dot{x_s}(t) u(x_s(t), t) + \int_{x_s(t)}^b u_t(x, t) dx - \dot{x_s}(t) u(x_s(t), t) = \phi(a, t) - \phi(b, t).$$

En laat a en b naar $x_s(t)$ convergeren. Met de notatie

$$[\phi](y, t) = \lim_{x \downarrow y} \phi(x, t) - \lim_{x \uparrow y} \phi(x, t), \qquad [u](y, t) = \lim_{x \downarrow y} u(x, t) - \lim_{x \uparrow y} u(x, t),$$

krijgen we dan de zogenaamde Rankine-Hugoniot conditie

$$\dot{x_s}(t) = \frac{[\phi](x_s(t), t)}{[u](x_s(t), t)}.$$