

Dimensie theorie

Ale Jan Homburg en Geertje Hek

KdV Instituut voor Wiskunde

Universiteit van Amsterdam

Plantage Muidergracht 24

1018 TV Amsterdam

`alejan@science.uva.nl`, `ghek@science.uva.nl`

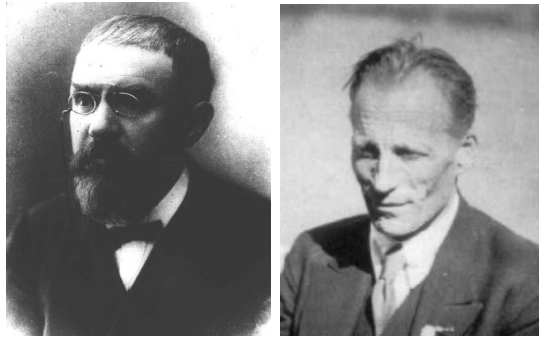
8 april 2002

1 Introductie

‘Of all the theorems of analysis situs, the most important is that which we express by saying that space has three dimensions. It is this proposition that we are about to consider, and we shall put the question in these terms: when we say that space has three dimensions, what do we mean?’

Dit schreef de Franse wiskundige Poincaré in 1912, het laatste jaar van zijn leven, in een filosofisch tijdschrift. Een jaar later gaf de Nederlandse wiskundige Brouwer een definitie van dimensie, equivalent met de definitie die we vandaag de dag nog gebruiken. Tot de wiskundige definitie van dimensie door Brouwer werd geïntroduceerd, werd dimensie losjes gedefinieerd als het aantal coördinaten dat nodig is om de verzameling te beschrijven. Zo wordt een punt op een lijn vastgelegd met één getal, een punt in een vlak met twee getallen en zo verder. Wiskundigen hadden tot in de negentiende eeuw alleen te maken met meetkundige figuren die niet ingewikkelder waren dan veelvlakken zoals kubussen en oppervlakken zoals bollen en cilindrs. Er bestond daarom geen behoefte aan een precieze definitie van dimensie.

Dat werd anders met een aantal ontdekkingen die aan het einde van de negentiende eeuw gedaan werden. Zo vond Cantor in 1877 dat het mogelijk is punten in een lijn één op één te relateren met punten in een vlak, zodat je niet zonder meer kunt zeggen dat het vlak groter is dan een lijn. Uit 1890 stamt de Peano kromme, een continue afbeelding van een interval naar een geheel vierkant.



Figuur 1: Links: Henri Poincaré (1854-1912). Rechts: Luitzen Brouwer (1881-1966).

Reden te meer om nog eens goed na te denken over het verschil tussen lijn en vlak, tussen één en twee dimensies.

Door de definitie van Brouwer kan aan iedere verzameling een dimensie worden toegekend, waar dimensie een geheel getal $0, 1, 2, 3, \dots$ is. De dimensie van een verzameling kan ook oneindig zijn. Voor verzamelingen met een ingewikkelder meetkunde is het zinvol om dimensiebegrippen in te voeren die niet alleen gehele getallen opleveren en dus meer informatie kunnen geven over de verzameling. Dit werd al in de eerste helft van de vorige eeuw gedaan. De Hausdorff dimensie, een van de meest gebruikte dimensie begrippen waarbij de dimensie niet geheel hoeft te zijn, valt terug traceren naar werk van Hausdorff in 1919. De box counting dimensie, die we uitvoerig zullen bespreken, werd ingevoerd door Pontryagin en Schnirelman in 1932. De laatste tientallen jaren is duidelijk geworden dat verzamelingen met een ingewikkelde meetkunde veelvuldig voorkomen in natuurkundige toepassingen en in het vakgebied dynamische systemen. Typisch bij deze verzamelingen, fractalen genoemd door Mandelbrot, is dat de meetkunde ingewikkeld is op elke schaal. Onder het vergrootglas ziet de verzameling er even ingewikkeld uit als in het groot. De traditionele meetkunde is niet bij machte zulke verzamelingen goed te beschrijven. Fractale dimensies, zoals de box counting en de Hausdorff dimensie, worden gebruikt om preciezere beschrijvingen van zulke verzamelingen te geven. We zouden fractalen kunnen definiëren als die verzamelingen waarvan de fractale dimensie een getal oplevert dat niet geheel is. Deze definitie is overigens niet erg gelukkig, zoals we nog zullen zien.

Om het verschil met fractale dimensies aan te geven, noemen we het oude begrip van dimensie, dat alleen gehele getallen oplevert, de topologische dimensie. Om deze inleiding een sfeer van volledigheid mee te geven, wordt in het volgende hoofdstuk een definitie gegeven van topologische dimensie. Daarna volgen een aantal voorbeelden van fractale verzamelingen, en worden fractale

dimensies gedefinieerd, becommentarieerd, en zelfs uitgerekend. We besluiten deze inleiding in de dimensietheorie met een korte tour naar de frontlijn van het onderzoek naar fractalen.

2 Topologische dimensie

De wiskundige definitie van dimensie die Brouwer in 1913 gaf, werd niet direct opgemerkt door zijn collega-wiskundigen. Brouwer richtte zijn aandacht op het volgende probleem: bestaan er continue en inverteerbare afbeeldingen tussen de Euclidische ruimten \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m voor n verschillend van m ? Een inverteerbare afbeelding is injectief en surjectief: ieder tweetal beeldpunten heeft verschillende originelen, en in de verzameling waarop wordt afgebeeld heeft ieder punt een origineel. Zoals al opgemerkt had Cantor laten zien dat er wel inverteerbare afbeeldingen bestaan tussen \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m , maar deze afbeeldingen waren niet continu (punten die dicht bij elkaar liggen in \mathbb{R}^n werden afgebeeld op punten ver van elkaar in \mathbb{R}^m). De Peano kromme is wel continu en is wel een surjectieve afbeelding van $[0, 1]$ naar $[0, 1] \times [0, 1]$, maar is niet inverteerbaar. Brouwer liet zien dat er geen continue, inverteerbare afbeeldingen bestaan tussen \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m voor n verschillend van m . Daardoor kunnen we continue, inverteerbare afbeeldingen gebruiken als instrument om te bepalen of twee verzamelingen gelijke dimensie hebben. En omdat \mathbb{R}^0 (het punt), \mathbb{R}^1 (de lijn), \mathbb{R}^2 (het vlak), enz. dus niet op een continue, inverteerbare manier op elkaar af te beelden zijn volgens het resultaat van Brouwer, kunnen we dus volhouden dat \mathbb{R}^0 dimensie nul heeft, \mathbb{R}^1 dimensie één, en algemeen \mathbb{R}^n dimensie n .

Het was eerst niet opgevallen dat Brouwer een algemene definitie van dimensie gaf, geldig voor veel algemenere ruimten dan alleen \mathbb{R}^n . Er verschenen later dan ook andere definities, zoals van Menger en Urysohn, onafhankelijk van elkaar in 1922. Deze definities waren equivalent met die van Brouwer.

Deze definities zijn inductief: je kunt zeggen dat een ruimte dimensie n heeft als je eenmaal weet wat het betekent dat een ruimte dimensie $n - 1$ heeft. We geven de inductieve definitie van dimensie en bespreken daarna een aantal voorbeelden om de definitie uit te leggen. Menger heeft het begrip dimensie zo geïntroduceerd:

- De lege verzameling heeft dimensie -1 .
- Een verzameling heeft dimensie 0 in een punt p , als er willekeurig kleine omgevingen van het punt p zijn, waarvan de rand leeg is (dus dimensie -1 heeft). De verzameling zelf heeft

dimensie 0, als de verzameling dimensie 0 heeft in elk punt van de verzameling. Dus als elk punt willekeurig kleine omgevingen heeft zonder randpunten.

- Een verzameling X heeft dimensie n in een punt p , als er willekeurig kleine omgevingen van het punt p zijn, waarvan de rand dimensie $n - 1$ heeft. De verzameling X zelf heeft dimensie n als voor elk punt in X , de dimensie in dat punt $\leq n$ is en er bovendien een punt bestaat zodat X dimensie n heeft in dat punt.

We laten een aantal voorbeelden de revue passeren om deze abstracte definitie te begrijpen. Een verzameling bestaande uit één enkel punt heeft dimensie 0: de rand van de verzameling punten op afstand hooguit ϵ van het ene punt is leeg. Zo is de dimensie van elke verzameling van eindig veel punten gelijk aan 0.

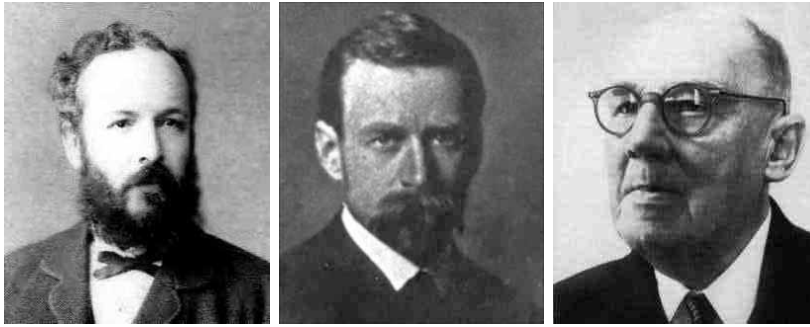
Bekijk nu de lijn \mathbb{R} , om te zien dat die dimensie één heeft, zoals we zouden willen. Als p een punt in \mathbb{R} is, bekijk dan een kleine omgeving $(p - \epsilon, p + \epsilon)$. Dan zijn er twee randpunten $p - \epsilon$ en $p + \epsilon$. De rand heeft daarmee dimensie 0, en dus heeft \mathbb{R} dimensie één.

Met hetzelfde argument zien we dat ook een cirkel dimensie één heeft. Het vlak \mathbb{R}^2 heeft dimensie twee: neem een punt p in het vlak en beschouw een kleine omgeving van punten binnen afstand ϵ van p . Dan is de rand van deze verzameling de cirkel van punten op afstand ϵ van p , en die heeft dimensie één.

Neem nu de verzameling \mathbb{Q} van rationale getallen, dus de verzameling van breuken $\frac{n}{m}$. Als p een breuk is, kun je een kleine omgeving $(p - \epsilon, p + \epsilon)$ nemen met ϵ een irrationaal getal. Dan zijn de randpunten $p - \epsilon$ en $p + \epsilon$ ook irrationale getallen, dus geen breuken. Deze beide punten liggen dus niet in \mathbb{Q} en dus is de rand van $(p - \epsilon, p + \epsilon)$, doorsneden met \mathbb{Q} , leeg. Ergo: de verzameling \mathbb{Q} van rationale getallen heeft topologische dimensie 0. Merk op dat de kleine omgeving van p speciaal gekozen wordt; de randpunten $p - \epsilon$ en $p + \epsilon$ zijn ook rationaal te kiezen. Maar juist omdat er een kleine omgeving $(p - \epsilon, p + \epsilon)$ te kiezen is met randpunten buiten \mathbb{Q} , heeft \mathbb{Q} topologische dimensie 0.

3 Voorbeelden van fractale verzamelingen

We introduceren drie fractale verzamelingen, de Cantor verzameling, de Koch kromme en de Sierpinski zeef, die we gaan gebruiken om het begrip fractale dimensie, wat in hoofdstuk 4 ingevoerd wordt, te toetsen.



Figuur 2: Van links naar rechts: Georg Cantor (1845-1918), Helge von Koch (1870-1924), Waclaw Sierpinski (1882-1969).

De Cantor verzameling. De standaard of middelste-derde Cantor verzameling wordt als volgt gedefinieerd. Neem het interval $[0, 1]$. Haal daar het middelste derde deel $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ uit weg. Dan blijven er twee intervallen over, $[0, \frac{1}{3}]$ en $[\frac{2}{3}, 1]$. Haal nu uit elk van die twee intervallen het middelste derde deel weg. Dan blijven er vier intervallen over, die samen de verzameling $[0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ vormen. Vervolg deze procedure door in elke volgende stap weer het middelste van ieder interval weg te halen. Wat overblijft is de standaard Cantorverzameling \mathcal{C} . Figuur 3 illustreert de procedure.



Figuur 3: De middelste derde Cantor verzameling wordt geconstrueerd door telkens het middelste derde deel van een interval weg te snijden.

Het is nu niet onmiddellijk duidelijk hoe de Cantorverzameling \mathcal{C} eruit ziet. Welke punten zitten erin, en welke niet? Hoe groot is de verzameling en wat is zijn dimensie?

Opgave. Laat zien dat de Cantor verzameling topologische dimensie nul heeft.

Verderop gaan we in op de fractale dimensie, maar hier willen we alvast bekijken uit welke punten \mathcal{C} bestaat. Dit kan inzichtelijk worden gemaakt door getallen in $[0, 1]$ niet in het decimale stelsel, maar in het tertiaire stelsel te schrijven. In het decimale stelsel wordt een getal $x \in [0, 1]$ geschreven als

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{10^i},$$

met $0 \leq x_i \leq 9$. Zoals bekend wordt dit opgeschreven als $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$

In het tertiaire stelsel schrijven we een getal $p \in [0, 1]$ als

$$p = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{3^i}, \tag{1}$$

met $p_i \in \{0, 1, 2\}$. De standaard Cantor verzameling bestaat uit alle getallen in $[0, 1]$ van de vorm

$$p = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{3^i}$$

met $p_i = 0$ of $p_i = 2$. Dus een coëfficiënt 1 komt niet voor als p in de middelste derde Cantor verzameling zit. Met andere woorden, bij iedere volgende macht van $\frac{1}{3}$ representeert de 1 het middelste stukje van ieder interval dat weggesneden wordt, en de 0 en 2 representeren het linker- en rechterdeel.

Om zelf te kijken of een willekeurig getal $p \in (0, 1)$ element van \mathcal{C} is, moet je dus de representatie van p in het tertiaire stelsel kennen. Die kan als volgt bepaald worden:

- Kies $p \in (0, 1)$ en bereken $q_1 = 3p$.
- Definieer $p_1 \in \{0, 1, 2\}$ door $p_1 \leq q_1 < p_1 + 1$ (p_1 heet de entier van q_1).
- Bereken $q_2 = 3(q_1 - p_1)$.
- Definieer $p_2 \in \{0, 1, 2\}$ door $p_2 \leq q_2 < p_2 + 1$.
- Bereken $q_3 = 3(q_2 - p_2)$.
- Definieer $p_3 \in \{0, 1, 2\}$ door $p_3 \leq q_3 < p_3 + 1$.
- Etcetera.

Uit de formule (1) blijkt dat het getal $p \in (0, 1)$ eenduidig vast ligt door het rijtje $\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ met $p_i \in \{0, 1, 2\}$ en dus gerepresenteerd kan worden door $p =_{(3)} 0, p_1 p_2 p_3 \dots$. Bijvoorbeeld

$$\frac{1}{2} =_{(3)} 0, 11111\dots, \quad \frac{1}{3} =_{(3)} 0, 1 \text{ en } \frac{1}{4} =_{(3)} 0, 020202\dots$$

Echter, verschillende rijtjes $\{p_1, p_2, \dots\}$ kunnen wel hetzelfde getal $p \in [0, 1]$ representeren:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} =_{(3)} 0, 1 =_{(3)} 0, 02222\dots, \quad \frac{2}{3} =_{(3)} 0, 2 =_{(3)} 0, 12222\dots \\ 1 =_{(3)} 1, 0 =_{(3)} 0, 22222\dots, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Dit fenomeen is natuurlijk ook in het decimale stelsel bekend, waar bijvoorbeeld geldt $1 =_{(10)} 0, 99999\dots$. Met behulp van deze tertiaire ontwikkeling hebben we nu dus niet alleen de voor de hand liggende randpunten $\frac{m}{3^n}$ van de constructie-intervallen als punten in \mathcal{C} gevonden, maar ook het minder voor de hand liggende punt $\frac{1}{4} =_{(3)} 0, 020202\dots \in \mathcal{C}$. De randpunten $\frac{m}{3^n}$ blijken overigens precies de punten met een dubbele ontwikkeling te zijn, dus een ontwikkeling zonder enen, en een waarin eenmaal het cijfer 1 voorkomt.

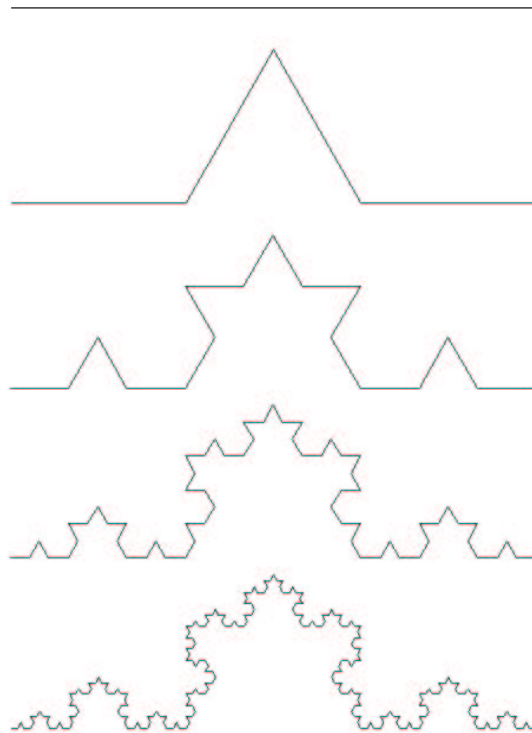
We hebben nu ook enig zicht op de ‘grootte’ van \mathcal{C} . Hoewel de topologische dimensie van \mathcal{C} nul is, bestaat \mathcal{C} in ieder geval uit oneindig veel punten. Sterker nog, we kunnen laten zien dat \mathcal{C} in zekere zin evenveel punten bevat als het interval $[0, 1]$. We kunnen aan ieder punt in \mathcal{C} namelijk een element in $[0, 1]$ koppelen en omgekeerd, door getallen in $[0, 1]$ weer anders te schrijven. Ditmaal maken we gebruik van de binaire representatie waarmee getallen ook in een computer opgeslagen zijn. Hierbij schrijven we

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i},$$

met $x_i = 0$ of $x_i = 1$. Ofwel, $x =_{(2)} 0, x_1 x_2 x_3 x_4 \dots$, een rij van nullen en enen. Verander nu elke 2 in de tertiaire ontwikkeling van een element $p \in \mathcal{C}$ in een 1, en er ontstaat een binair getal $x \in [0, 1]$ (of andersom). Op deze manier wordt bijvoorbeeld $\frac{1}{3} \in [0, 1]$ gekoppeld aan $\frac{1}{4} \in \mathcal{C}$.

De Koch kromme. Deze verzameling werd bedacht door de Zweedse wiskundige Von Koch in 1906. De Koch kromme wordt ook in stappen geconstrueerd, beginnend met het interval $[0, 1]$. In elke stap worden de aanwezige lijnstukken in drie gelijke delen verdeeld. Op het middelste lijnstuk wordt een gelijkzijdige driehoek geplaatst, waarna dit middelste lijnstuk wordt vervangen door de twee andere zijden van de gelijkzijdige driehoek. Het proces wordt geïllustreerd in figuur 4.

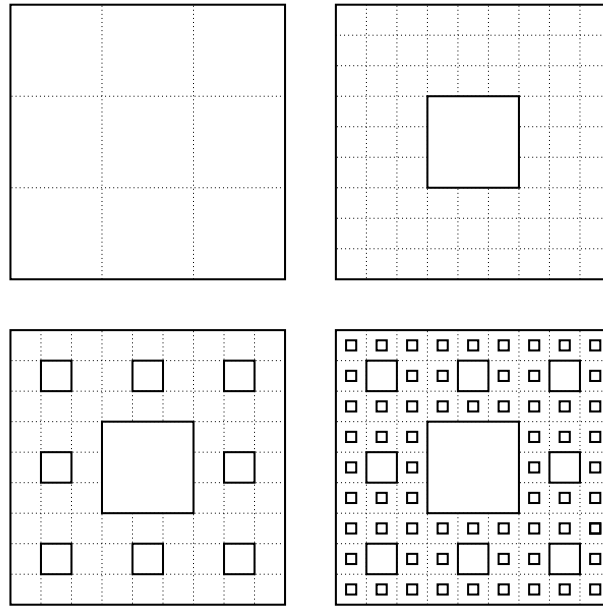
We kunnen eenvoudig de lengte berekenen van de kromme die na n constructiestappen verkregen is. Namelijk, in elke constructiestap worden drie aaneensluitende lijnstukken vervangen door



Figuur 4: In de constructie van de Koch kromme wordt telkens een lijnstuk in drie stukken verdeeld en wordt het middelste gedeelte vervangen door twee lijnstukken van een gelijkzijdige driehoek.

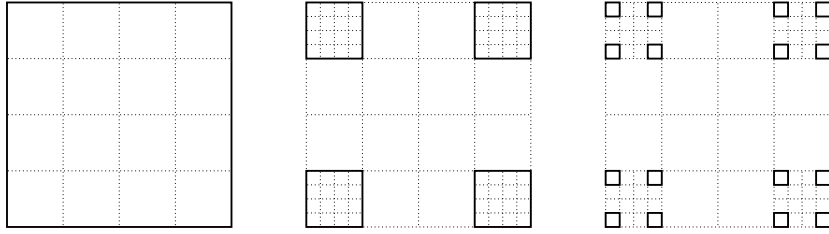
vier lijnstukken en dus wordt de lengte met een factor $\frac{4}{3}$ vergroot. Omdat we beginnen met een lijnstuk van lengte 1, is de lengte van de kromme na n constructie stappen gelijk aan $(\frac{4}{3})^n$. Merk op dat dit naar oneindig gaat als $n \rightarrow \infty$; de Koch kromme is in deze zin oneindig lang. Tussen elk tweetal punten op de Koch kromme, ligt een oneindig lang stuk Koch kromme. Toch ligt de kromme in een begreemd gebied.

De zeef van Sierpinski. De Sierpinski zeef werd in 1916 door de Pool Sierpinski verzonden. Ook deze figuur wordt in stappen geconstrueerd. Begonnen wordt met een vierkant $[0, 1] \times [0, 1]$. De figuur wordt in negen vierkanten verdeelt, elk met zijde $\frac{1}{3}$. Het middelste vierkant $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ wordt weggenomen. De procedure herhaald zich met de acht overgebleven vierkanten, die weer in negen vierkanten worden verdeeld en waaruit weer het middelste vierkant wordt weggehaald, zie figuur 5. De figuur die overblijft heet de zeef van Sierpinski.



Figuur 5: In de constructie van de zeef van Sierpinski wordt telkens een vierkant uit het midden weggesneden.

We kunnen de constructies die boven gegeven zijn makkelijk veranderen om nog andere fractalen te krijgen. In de Cantor verzameling zou je bijvoorbeeld in plaats van het middelste derde deel telkens het middelste vierde deel kunnen weghalen. Dit levert een andere fractaal op met een andere dimensie. We geven nog een interessant voorbeeld van een fractale verzameling in het vlak met, zoals later zal blijken, een dimensie gelijk aan 1. De fractale dimensie van deze verzameling is dus gelijk aan die van een lijnstuk. De constructie is een variant van de zeef van Sierpinski. Begonnen wordt met een vierkant $[0, 1] \times [0, 1]$. Dit wordt in zestien gelijke vierkanten, elk met zijde $\frac{1}{4}$ verdeeld. Dan worden alleen de vier vierkanten in de hoeken bewaard, de rest wordt weggegooid. We houden dus over de vierkanten $[0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{4}]$, $[0, \frac{1}{4}] \times [\frac{3}{4}, 1]$, $[\frac{3}{4}, 1] \times [0, \frac{1}{4}]$ en $[\frac{3}{4}, 1] \times [\frac{3}{4}, 1]$. Met elk van deze vierkanten wordt de procedure herhaald. Na oneindig veel stappen blijft een fractaal over, zie figuur 6.



Figuur 6: Deze fractaal, een variant van de Cantor verzameling in het vlak, zal blijken dimensie 1 te hebben, net als een lijnstuk. In elke constructiestap blijven van een vierkant vier kleinere vierkanten in de hoeken over.

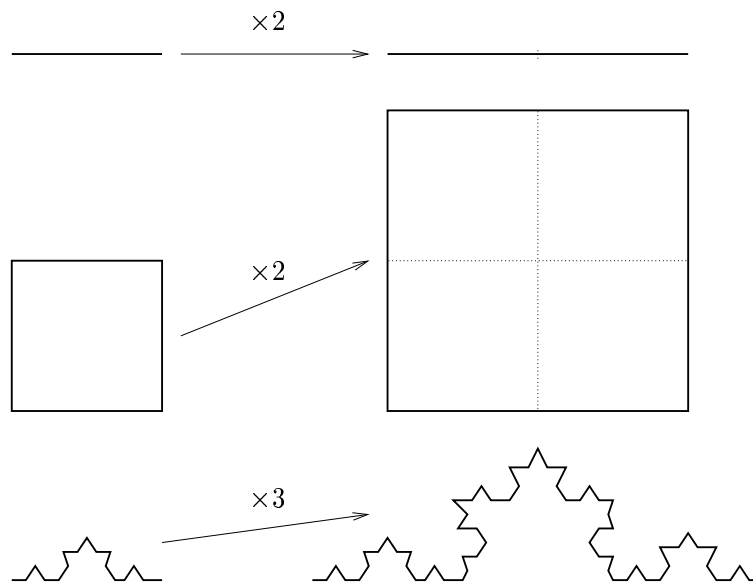
4 Fractale dimensies

Het onderscheid in dimensies van verzamelingen komt tot uitdrukking in verschillend schalingsgedrag wanneer de figuur wordt vergroot of verkleind. Als een lijnstuk twee keer vergroot wordt, dan levert dat twee kopieën van het oorspronkelijke lijnstuk op: het interval $[0, 1]$ past twee keer in $[0, 2]$. Als een vierkant twee keer vergroot wordt, dan levert dat vier kopieën van het oorspronkelijke vierkant op: er passen vier vierkanten met zijde 1 in een vierkant met zijde 2. Dit is uitgebeeld in figuur 7.

Als we de Koch kromme drie keer zo groot maken, dan krijgen we vier kopieën terug. Als we de middelste derde Cantor verzameling drie keer zo groot maken, dan krijgen we twee kopieën terug.

Dit schalingsgedrag willen we tot uitdrukking brengen in een definitie van fractale dimensie. Niet elke verzameling levert een aantal kopieën van zichzelf op als we de verzameling met een factor vergroten. Een geschikte definitie van fractale dimensie die voor alle verzamelingen werkt heeft daarom nog wat voeten in de aarde. Beneden zullen we mogelijke definities uitwerken. We gaan twee definities uitwerken, de box counting dimensie en de Hausdorff dimensie. De definitie van de box counting dimensie is toegesneden op het kunnen uitrekenen van de dimensie van meer of minder ingewikkelde verzamelingen, bijvoorbeeld met een computer. Het begrip Hausdorff dimensie is wiskundig beter, maar laat zich moeilijker hanteren.

We kunnen al wel verklappen dat de bovenstaande schalingen voor lijnstuk, vierkant, Koch kromme en Cantor verzameling hun fractale dimensies geven (de box counting en Hausdorff dimensie zijn in deze gevallen gelijk). Als het k keer vergroten van de verzameling l kopieën oplevert, is de dimensie gelijk aan $\ln l / \ln k$. Voor het lijnstuk is de dimensie dan $\ln 2 / \ln 2 = 1$, wat ge-



Figuur 7: Door de figuren links met de aangegeven factor te vergroten, krijgen we een aantal kopieën terug. Een lijnstuk dat twee keer zo groot wordt, herbergt twee kopieën van het lijnstuk. Een vierkant dat twee keer vergroot wordt, geeft vier kopieën. De Koch kromme die drie keer vergroot wordt, levert vier kopieën van de oorspronkelijke Koch kromme op. Dit verschil in schalingsgedrag betekent dat de figuren verschillende dimensie hebben.

lukkig overeenkomt met de topologische dimensie. Voor het vierkant is de dimensie gelijk aan $\ln 4 / \ln 2 = 2 \ln 2 / \ln 2 = 2$, alweer wat we willen. De Koch kromme heeft dimensie $\ln 4 / \ln 3$, een getal tussen 1 en 2. En de standaard Cantor verzameling heeft dimensie $\ln 2 / \ln 3$, positief maar kleiner dan 1.

Opgave. Bereken op deze manier de dimensie van de Sierpinski zeef.

Opgave. Maak duidelijk dat de fractaal uit figuur 6, zoals beschreven in het vorige hoofdstuk, dimensie gelijk aan 1 heeft.

Met de niet-gehele of gebroken dimensie van de Koch kromme wordt mooi tot uitdrukking gebracht dat de Koch kromme meer in zich bergt dan een lijnstuk, maar kleiner is dan een vierkant. Dit in tegenstelling tot de topologische dimensie van de Koch kromme, die één is. En de stan-

daard Cantor verzameling is weliswaar kleiner dan een lijnstuk, maar kunnen we nu onderscheiden van nul dimensionale verzamelingen. Met de topologische dimensie lukt dat niet, want die is nul voor de Cantor verzameling. De laatste opgave laat overigens zien dat het definiëren van fractalen als verzamelingen met niet gehele dimensie, niet helemaal geslaagd is. De verzameling die in figuur 6 gemaakt wordt, willen we wel een fractaal noemen. Een betere definitie, zoals ook eerst door Mandelbrot gebruikt, zou zijn om een fractaal een verzameling te noemen waarvan de fractale (Hausdorff) dimensie groter is dan de topologische dimensie. Dan komen we goed weg met dit voorbeeld, want de topologische dimensie is 0. Maar ook deze definitie dekt niet alle voorbeelden. Sterker nog, een allesomvattende definitie lijkt niet te bestaan.

Box counting dimensie. De box counting dimensie is een dimensiebegrip dat veel gebruikt wordt, omdat er wiskundig relatief makkelijk mee valt te rekenen en het empirisch goed valt te schatten. Het begrip bestaat al sinds de dertiger jaren van de vorige eeuw en komt onder vele namen voor zoals *entropy dimension*, *capacity*, *information dimension* naast de naam box counting dimensie die wij gebruiken.

In de definitie van box counting dimensie wordt geprobeerd een figuur te overdekken met bollen van een vaste diameter. In plaats van te kijken hoeveel groter de figuur wordt als die onder een vergrootglas gelegd wordt, zoals boven beschreven, wordt gekeken hoeveel meer bollen nodig zijn om de figuur te overdekken als die bollen verkleind worden.

OPMERKING. De bollen waarover we spreken zijn niet alleen de welbekende drie-dimensionale bollen, maar algemenere n -dimensionale bollen. Deze bollen zijn een analogon van wat we al kennen. Een bol van straal r of diameter $d = 2r$ rond de oorsprong in \mathbb{R}^3 wordt gegeven door

$$B_r^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq r^2\}.$$

Analoog kennen we cirkelschijven in \mathbb{R}^2 :

$$B_r^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}.$$

Deze cirkelschijven noemen we nu twee-dimensionale bollen en in \mathbb{R}^n definiëren we op dezelfde manier n -dimensionale bollen:

$$B_r^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq r^2\}.$$

Natuurlijk kunnen we de bollen ook een ander middelpunt dan de oorsprong geven. Eveneens kunnen we een algemene versie van het vierkant en de kubus definiëren als de n -dimensionale kubus:

$$K_r^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad |x_i| \leq r, i = 1, \dots, n\}.$$

Hiervan zullen we gebruik maken bij het daadwerkelijk uitrekenen van box counting dimensies.

Laat X een verzameling zijn die in een begrensde gebied in \mathbb{R}^n ligt. Overdek X met n -dimensionale bollen van diameter δ . Laat $N_\delta(X)$ het minimale aantal bollen van diameter δ zijn waarmee X valt te overdekken. We willen uitdrukken hoeveel meer bollen we nodig hebben om X te overdekken als we de bollen een factor kleiner maken. Dit willen we weten voor bollen die al klein zijn, dus in de limiet $\delta \rightarrow 0$. De volgende uitdrukking vertelt ons dit en definiëren we als de box counting dimensie $\dim_B X$ van X ,

$$\dim_B X = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(X)}{-\ln \delta}. \quad (2)$$

Om aan te geven wat deze formule betekent: als er $N_\delta(X) = C(\frac{1}{\delta})^\alpha$ bollen van diameter δ nodig zijn om X te overdekken (voor zekere constanten C en α), dan geldt

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(X)}{-\ln \delta} = \frac{-\alpha \ln \delta + \ln C}{-\ln \delta} = \alpha.$$

In dit geval is het aantal benodigde bollen van diameter δ om X te overdekken dus evenredig met $(\frac{1}{\delta})^{\dim_B X}$. Dat blijkt ook de algemene strekking van de formule (2) te zijn.

Laten we nu echt een box counting dimensie uitrekenen, van de standaard Cantor verzameling. We maken gebruik van het feit dat de drie keer vergrootte Cantor verzameling, twee kopieën van de Cantor verzameling geeft. Samen met de Cantor verzameling vergroten en verkleinen we ook overdekkingen van de Cantor verzameling met intervallen (één dimensionale bollen). In het wiskundige argument dat volgt, noemen we wel overdekkingen, maar proberen we niet echt een overdekking van de Cantor verzameling met een minimaal aantal intervallen te construeren. Dat zou meer en vervelend werk kunnen zijn, en blijkt niet nodig te zijn.

Stelling. *De box counting dimensie van de standaard Cantor verzameling \mathcal{C} is $\ln 2 / \ln 3$.*

BEWIJS. Laat $\Delta < \frac{1}{2}$. Het minimale aantal intervallen van lengte Δ om \mathcal{C} te overdekken is $N_\Delta(\mathcal{C})$. Vergroot nu de Cantor verzameling \mathcal{C} met een factor 3. Dan zien we twee kopieën van \mathcal{C} terug, een

ligt in het interval $[0, 1]$ en een in het interval $[2, 3]$. Beide kopieën laten zich overdekken met $N_\Delta(\mathcal{C})$ intervallen van lengte Δ , en niet met minder. Omdat de twee kopieën afstand 1 van elkaar af liggen, en $\Delta < \frac{1}{2}$, snijden de beide overdekkingen elkaar niet. De drie keer vergrootte Cantor verzameling kan daarom overdekt worden met $2N_\Delta(\mathcal{C})$ intervallen van lengte Δ , en niet met minder. Schaal nu de drie keer vergrootte Cantor verzameling, met de intervallen voor de overdekking, weer terug. Dan krijgen we een overdekking van \mathcal{C} met $2N_{\Delta/3}(\mathcal{C})$ intervallen van lengte $\Delta/3$. Deze overdekking is er een met het kleinst mogelijke aantal intervallen. Dus

$$N_{\Delta/3}(\mathcal{C}) = 2N_\Delta(\mathcal{C}).$$

Nu gaan we \mathcal{C} overdekken met kleine intervallen van lengte $\delta = \Delta \left(\frac{1}{3}\right)^n$. We kunnen δ klein maken door n groot te maken. Er geldt $N_\delta(\mathcal{C}) = 2^n N_\Delta(\mathcal{C})$. Dus

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(\mathcal{C})}{-\ln \delta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_\delta(\mathcal{C})}{-\ln \delta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n N_\Delta(\mathcal{C})}{-\ln \Delta/3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln 2 + \ln N_\Delta(\mathcal{C})}{n \ln 3 - \ln \Delta} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

□

OPMERKING. Voor sommige waarden van δ is het wel makkelijk om een minimale overdekking te construeren. In de n -de constructiestap van de Cantor verzameling \mathcal{C} zijn er 2^n intervallen van lengte $(\frac{1}{3})^n$. Als we $\delta = (\frac{1}{3})^n$ nemen, hebben we dus 2^n intervallen nodig voor een overdekking. Dit is duidelijk het kleinst mogelijke aantal, zodat $N_\delta(\mathcal{C}) = 2^n$ en $-\ln N_\delta(\mathcal{C})/\ln \delta = \ln 2/\ln 3$. Voor andere waarden van δ is het niet zo duidelijk.

Het probleem met de box counting dimensie is dat de limiet in (2) niet voor elke verzameling X bestaat. Alleen als de limiet bestaat spreken we van de box counting dimensie van X . Het niet altijd bestaan van de limiet is een wiskundig bezwaar, dat niet optreedt voor de Hausdorff dimensie die we verderop behandelen.

Een tweede bezwaar dat tegen de definitie gemaakt kan worden, is de soms onwenselijke uitkomsten voor bepaalde verzamelingen. Het volgende voorbeeld geeft een verzameling die we niet een fractaal zouden willen noemen, maar wel een niet gehele fractale dimensie heeft.

Opgave. Beschouw de verzameling punten $X = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}$. Laat zien dat de box counting dimensie $\dim_B X$ gelijk is aan $\frac{1}{2}$. Hint: Probeer X te overdekken met intervallen van lengte δ . De afstand tussen de getallen $\frac{1}{k}$ en $\frac{1}{k-1}$ is $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)}$. De afstand tussen $\frac{1}{k+1}$ en $\frac{1}{k}$ is $\frac{1}{k(k+1)}$.

Neem k zo dat δ ligt tussen $\frac{1}{k(k+1)}$ en $\frac{1}{k(k-1)}$. Als δ klein is, dan is k groot. Tel het aantal intervallen nodig om X te overdekken.

Deze bezwaren worden opgevangen door de definitie van box counting dimensie iets te variëren en een grotere vrijheid in het overdekken van de verzameling toe te laten. Dit leidt tot de definitie van Hausdorff dimensie. De Hausdorff dimensie van de verzameling in de opgave is 0, zoals we zouden willen. We zien dat ook als de box counting dimensie bestaat, deze verschillend kan zijn van de Hausdorff dimensie. Wel is de box counting dimensie altijd groter of gelijk aan de Hausdorff dimensie. Dit is in te zien aan de hand van de definitie die volgt. Een berekening van de box counting dimensie geeft dus altijd informatie over de Hausdorff dimensie.

Hausdorff dimensie. De bezwaren die we hebben geuit tegen de definitie van box counting dimensie worden opgevangen door de definitie van Hausdorff dimensie. Het voordeel van de box counting dimensie, dat deze makkelijk empirisch is te benaderen, gaat echter verloren. De definities die volgen zijn technischer dan we tot nu toe hebben gezien, maar worden voor de volledigheid opgenomen.



Figuur 8: Felix Hausdorff (1868-1942).

De definitie van de Hausdorff dimensie maakt, net als bij de box counting dimensie, gebruik van overdekkingen. Maar in plaats van alleen bollen met vaste diameter toe te laten, worden algemenere verzamelingen, ook variërend in grootte gebruikt. Om de definitie voor te bereiden, en aan te geven hoe deze gezien kan worden als verbetering van de box counting dimensie, beginnen we met een berekening aan de standaard Cantor verzameling. Zoals we uit de constructie daarvan halen, kunnen we de standaard Cantor verzameling overdekken met 2^n intervallen U_i , $0 \leq i \leq 2^n$,

ter lengte $(\frac{1}{3})^n$. Schrijf $|U_i|$ voor de lengte van U_i , dus $|U_i| = (\frac{1}{3})^n$. Voor $s > 0$ hebben we

$$\sum_{i=1}^{2^n} |U_i|^s = \sum_{i=1}^{2^n} \left(\left(\frac{1}{3} \right)^n \right)^s = 2^n \left(\frac{1}{3} \right)^{ns} = \left(2 \left(\frac{1}{3} \right)^s \right)^n.$$

Dit laatste getal is gelijk aan 1 als $s = \ln 2 / \ln 3$, de box counting dimensie van de standaard Cantor verzameling. En voor $s < \ln 2 / \ln 3$ geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \left(\frac{1}{3} \right)^s \right)^n = \infty$, want dan is $2 \left(\frac{1}{3} \right)^s > 1$. Voor $s > \ln 2 / \ln 3$ geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \left(\frac{1}{3} \right)^s \right)^n = 0$. We zien dat we de box counting dimensie terugvinden als het getal s waar $\sum_{i=1}^{2^n} |U_i|^s$ van ∞ naar 0 springt.

De definitie van de Hausdorff dimensie volgt dit idee. Laat opnieuw X een verzameling in een begrensd gebied van \mathbb{R}^n zijn. Met een δ -overdekking van X bedoelen we een overdekking van X door een rij verzamelingen U_1, U_2, U_3, \dots waarvan elke verzameling in een bol van diameter δ past. Voor een verzameling U , schrijven we $|U|$ voor de diameter van die verzameling, ofwel de grootste afstand tussen twee punten in U . Laat

$$H_\delta^s(X) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s; U_1, U_2, U_3, \dots \text{ is een } \delta\text{-overdekking van } X \right\}. \quad (3)$$

Als we δ groter laten worden, dan zijn er meer δ -overdekkingen van X , en zou het infimum in de uitdrukking voor H_δ^s kleiner kunnen worden. Dus H_δ^s is een dalende (althans niet stijgende) functie van δ . Dit betekent dat de limiet $\lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s$ bestaat (of oneindig is). Deze limiet noemen we de s -dimensionale Hausdorff maat van X . We noteren de limiet als $H^s(X)$, dus

$$H^s(X) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(X).$$

Voor $t > s$ geldt dat

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t = \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$$

Als $H^s(X) < \infty$ is voor een waarde van s , dan geldt $H^t(X) = 0$ als $t > s$. Want, als $t - s > 0$, dan gaat δ^{t-s} naar nul als $\delta \rightarrow 0$. Op dezelfde manier zien we dat dan $H^t(X) = \infty$ als $t < s$. Er is dus een sprong s^* waar $H^s(X)$ van ∞ naar 0 springt: deze sprongwaarde heet de Hausdorff dimensie $\dim_H(X)$ van X .

5 Numeriek uitrekenen van box counting dimensies

Voordat we verder gaan werken met de box counting dimensie, laten we zien dat het niet essentieel is om overdekkingen met bollen te gebruiken. We kunnen net zo goed gebruik maken van kubussen.

Om dit te laten zien, maken we een kleine berekening voor een verzameling X in het vlak. Een bol is dan een cirkelschijf, een kubus is een vierkant. Laat $M_\delta(X)$ het kleinste aantal vierkanten met zijde δ zijn dat nodig is om X te overdekken. Elk vierkant met zijde δ kan overdekt worden door vier cirkelschijven met diameter δ . Dus

$$N_\delta(X) \leq 4M_\delta(X).$$

En elke cirkelschijf van diameter δ past in een vierkant van zijde δ . Dus

$$M_\delta(X) \leq N_\delta(X).$$

Hieruit volgt dat

$$\frac{\ln \frac{1}{4} N_\delta(X)}{-\ln \delta} \leq \frac{\ln M_\delta(X)}{-\ln \delta} \leq \frac{\ln N_\delta(X)}{-\ln \delta},$$

dus

$$\frac{\ln \frac{1}{4} + \ln N_\delta(X)}{-\ln \delta} \leq \frac{\ln M_\delta(X)}{-\ln \delta} \leq \frac{\ln N_\delta(X)}{-\ln \delta}.$$

Als we links en rechts de limiet voor $\delta \rightarrow 0$ nemen, zien we dat

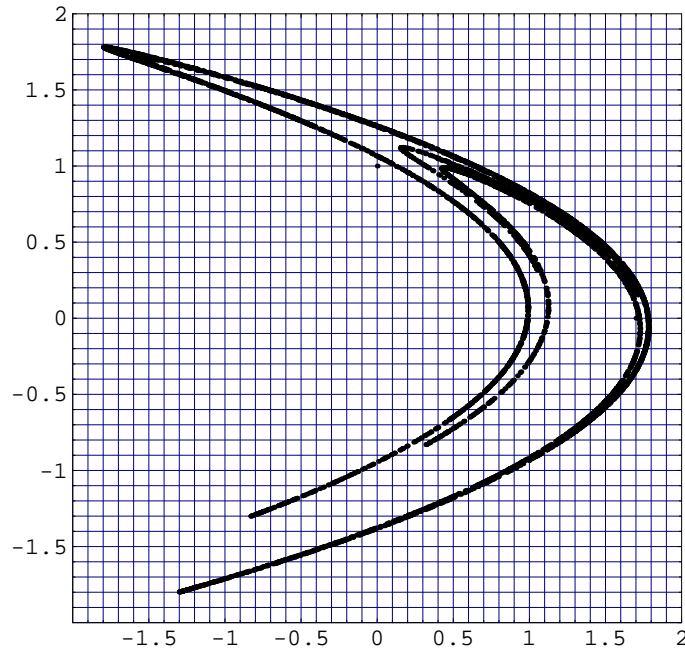
$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1}{4} + \ln N_\delta(X)}{-\ln \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(X)}{-\ln \delta}.$$

De insluitstelling voor limieten impliceert dat ook

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln M_\delta(X)}{-\ln \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(X)}{-\ln \delta}. \quad (4)$$

Het resultaat (4) vertelt dat het niet uitmaakt of we X overdekken met cirkelschijven of met vierkanten. Eenzelfde argument gaat op voor verzamelingen X in \mathbb{R}^n .

Volgens een soortgelijke redenering kunnen we werken met een vast rooster. Als X bevat is in een vierkant $[-M, M] \times [-M, M]$ in het vlak, dan kunnen we dit vierkant opdelen in veel kleine vierkanten (zeg n^2 vierkanten van zijde M/n). Uit deze vierkanten kunnen we een overdekking van X kiezen. Dat wil zeggen, voor een overdekking van X gebruiken we de vierkanten waarin een punt van X ligt. Door te tellen hoeveel vierkanten nodig zijn om X te overdekken, kunnen we een schatting van de box counting dimensie maken. Deze procedure verklaart de naam box counting dimensie.



Figuur 9: Deze figuur heet de Hénon attractor. Deze fractaal heeft een box counting dimensie van ongeveer 1.26 volgens een numerieke berekening.

De Hénon attractor. We gaan kijken hoe dit schatten van de box counting dimensie werkt bij een beroemd voorbeeld van een vreemde attractor. Vreemde attractoren spelen een rol in de theorie van dynamische systemen. In 1976 bekeek Hénon de volgende afbeelding $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$h(x, y) = (1.4 - x^2 + 0.3y, x).$$

Deze afbeelding heet nu de Hénon afbeelding. Meer algemeen vallen de constanten 1.4 en 0.3 te vervangen door andere constanten. Maar juist deze getallen leveren de figuur op die bekend staat als de Hénon attractor.

Hénon itereerde deze afbeelding. Dat wil zeggen, hij koos een beginpunt (x_0, y_0) in het vlak en beeldde dat af op $(x_1, y_1) = h(x_0, y_0)$. Verder itererend levert dit een rij punten $(x_{i+1}, y_{i+1}) = h(x_i, y_i)$. Het subscript i geeft het aantal achtereenvolgende iteraties aan, en valt te zien als tijd. Het itereren van de afbeelding is daarom een dynamisch systeem. Het bleek dat, onafhankelijk van de keuze van het beginpunt (x_0, y_0) , een plot van de punten (x_i, y_i) altijd dezelfde vreemde figuur in het vlak laat zien: de Hénon attractor in figuur 9.

De Hénon attractor bleek fractale eigenschappen te hebben. Ook als met een vergrootglas een klein deel bekeken wordt, heeft de Hénon attractor een ingewikkelde meetkundige structuur. (Strikt gesproken is het bestaan van een fractaal als attractor niet bewezen voor de Hénon afbeelding met de parameters 1.4 en 0.3, maar bekend is dat fractale attractoren voor veel parameterwaarden voorkomen.) Het is dus interessant om numeriek een schatting te geven van de box counting dimensie van de Hénon attractor. Dit gaat als volgt. Kies een beginpunt (x_0, y_0) en itereer de afbeelding met een computer een flink aantal (meerdere duizenden) keren. Overdek de verkregen figuur met kleine vierkantjes, en tel in hoeveel vierkantjes een van de berekende punten zit. Als δ de zijde van de gebruikte vierkantjes is, en er N_δ vierkantjes zijn die een berekend punt bevatten, dan is $-\ln N_\delta / \ln \delta$ een schatting van de box counting dimensie.

Opgave. Neem aan dat 10000 punten gebruikt zijn om de Hénon attractor te plotten. Leg uit waarom we niet onbeperkt fijne roosters kunnen gebruiken om X te overdekken als we de box counting dimensie willen schatten.

Overigens houdt de belangstelling niet op bij het beschrijven van de meetkunde van de attractor. Ook belangrijk zijn typisch dynamische eigenschappen, zoals de kans om een punt uit een baan in een bepaald gebied te vinden. Of kennis over hoe snel fouten verergeren onder itereren. Men probeert dynamische eigenschappen te relateren aan de meetkunde van de attractor. We zullen de benodigde wiskundige begrippen hier niet uitwerken.

6 Tot slot

Voor diegenen die enthousiast geworden zijn, geven we hier nog een extraatje, om een tip van de sluier van het hedendaagse onderzoek op te lichten.

De voorbeelden van fractalen die we in hoofdstuk 3 hebben gezien vertonen een precieze gelijkvormigheid als ze met een vergrootglas worden bekeken. Maar veel interessante fractalen hebben weliswaar een ingewikkelde meetkundige structuur op elke schaal, maar hebben niet die precieze gelijkvormigheid. In het midden van de tachtiger jaren stelde een groep natuurkundigen voor om te proberen fractalen te verdelen in kleinere fractalen die beter te onderzoeken zijn. Hieruit ontstond wat nu bekend staat als multifractale analyse.

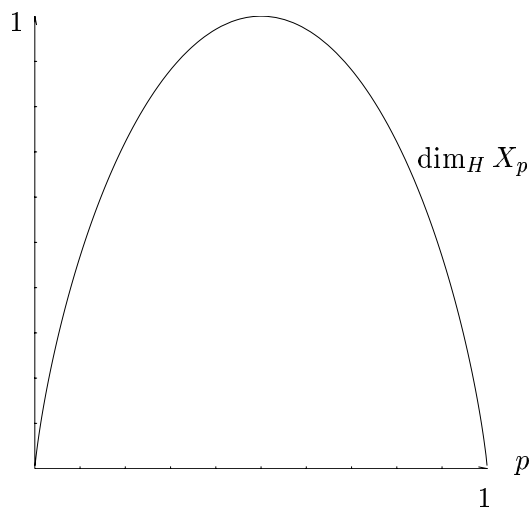
Om de koe bij de horens te vatten, bekijken we een voorbeeld dat de richting van het denken

aangeeft. De eerlijkheid gebiedt te zeggen dat het resultaat wat nu volgt, van Eggleston, al uit 1952 stamt. Het geeft wel een mooie illustratie van de moderne ideeën. We gaan getallen $x \in [0, 1]$ schrijven in de binaire ontwikkeling, die we ook bij de beschrijving van de standaard Cantor verzameling al hebben gebruikt. We schrijven dus

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i},$$

met $x_i = 0$ of $x_i = 1$. Ofwel, we schrijven $x = 0, x_1 x_2 x_3 x_4 \dots$ en zien x als een rij van nullen en enen. Nou kunnen we ons afvragen wat de fractie nullen of enen in zo'n rij is, voor de binaire ontwikkeling van een bepaald getal x . De fractie enen is gelijk aan $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. Deze limiet hoeft niet altijd te bestaan, dus niet voor elk getal x kunnen we spreken over de fractie enen in de binaire representatie van x .

Laat X de verzameling getallen in $[0, 1]$ zijn waarvoor de limiet wel bestaat, dus waarvoor de fractie enen in de binaire representatie goed gedefinieerd is. Schrijf X_p voor de verzameling getallen waarvoor de fractie enen gelijk aan p is (waar dus $0 \leq p \leq 1$). Dus X is de vereniging van de verzamelingen X_p . Al deze verzamelingen X_p en X zijn fractalen. Eggleston is er in geslaagd



Figuur 10: Grafiek van de functie $p \mapsto \frac{1}{\ln 2} [-p \ln p - (1 - p) \ln(1 - p)]$, die de Hausdorff dimensie van X_p geeft.

de Hausdorff dimensies van deze verzamelingen uit te rekenen:

$$\dim_H X_p = \frac{1}{\ln 2} [-p \ln p - (1 - p) \ln(1 - p)].$$

In figuur 10 is de Hausdorff dimensie van X_p uitgezet tegen p . We zien dat de Hausdorff dimensie van X_p maximaal is als $p = \frac{1}{2}$, waar $\dim_H X_{1/2} = 1$. Er geldt dan ook voor bijna elke x uit het interval $[0, 1]$, dat de fractie enen en nullen in de binaire representatie van x bestaat en gelijk aan $\frac{1}{2}$ is.

Verantwoording. De tekst over de Cantorverzameling is gebaseerd op een deel van Arjen Doelmanns tekst ‘*Het begrip dimensie: theorie en experiment*’ in [4].

Voor verdere informatie en studie hebben we ook andere referenties opgenomen, waaronder twee in het Nederlands. Hiervan is [6] geschikt om leerlingen in de hoogste klassen van het VWO kennis te laten maken met fractalen en gebroken dimensies.

Referenties

- [1] M.F. Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press, 1988.
- [2] H.W. Broer, F. Verhulst, *Dynamische systemen en chaos*, Epsilon uitgaven, 1990.
- [3] J. Dieudonné, *A history of algebraic and differential topology 1900-1960*, Birkhäuser, 1989.
- [4] A. Doelman Het begrip dimensie, theorie en experiment, in *Vakantiecursus 2001 Experimentele wiskunde, CWI syllabus 49*, p. 17-38.
- [5] K. Falconer, *Fractal geometry*, John Wiley & Sons, 1990.
- [6] I. Hoveijn, J. Scholtmeijer, *Fractals*, Epsilon uitgaven, 2001.
- [7] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton University Press, 1941.
- [8] B.B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, Freeman, 1982.
- [9] H.-O. Peitgen, P.H. Richter, *The beauty of fractals*, Springer Verlag, 1986.
- [10] Y. Pesin, *Dimension theory in dynamical systems*, Cambridge University Press, 1997.