

Tentamen
Dynamische Systemen
Mei 2007

1. Laat zien dat de rotatie $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}$ op de cirkel \mathbb{R}/\mathbb{Z} , voor α irrationaal, minimaal is.

Stel niet en neem een maximaal interval (a, b) buiten de afsluiting van een niet dicht liggende baan. Itereer dit interval. $R_\alpha^k(a, b) = (a, b)$ kan niet vanwege irrationaliteit van α . En $R_\alpha^k(a, b)$ kan (a, b) niet doorsnijden vanwege de aanname dat (a, b) maximaal is. Dus $R_\alpha^i(a, b) \cap R_\alpha^j(a, b) = \emptyset$ voor $i \neq j$. Omdat de intervallen $R_\alpha^k(a, b)$ allemaal dezelfde lengte hebben, geeft dit een tegenspraak.

2. Beschouw een hyperbolisch torus automorfisme gegeven door een niet-singuliere matrix A met gehele coëfficiënten (hyperbolisch betekent dat de modulus van de eigenwaarden niet 1 is). Laat zien dat de stabiele en onstabiele variëteiten (de projectie naar de torus van de eigenruimten van A) dicht liggen op de torus. Hint: Bereken de eigenvectoren van A en gebruik de eerste opgave.

Schrijf $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Merk op dat $|ad-bc| = 1$. De eigenwaarden van A zijn irrationaal: de discriminant $(a+d)^2 - 4$ is namelijk geen kwadraat. Dit is eenvoudig in te zien door te schrijven $t^2 - 4 = k^2$ en $t^2 - k^2 = (t-k)(t+k) = 4$. Dit laatste gaat niet. De onstabiele eigenruimte heeft derhalve irrationale helling (de stabiele eigenruimte gaat analoog). De opeenvolgende snijpunten met de cirkel $\{0\} \times \mathbb{S}^1$ geeft een afbeelding als in de eerste opgave.

3. Beschouw een continue afbeelding $T : X \rightarrow X$ op een Hausdorff topologische ruimte X . Bewijs de volgende uitspraak. Als X geen geïsoleerde punten heeft en $\mathcal{O}^+(x)$ ligt dicht, dan ligt de omega-limiet verzameling $\omega(x)$ dicht. Geef een voorbeeld waarmee aangetoond wordt dat dit onjuist is als X een geïsoleerd punt heeft.

Zij $y \in X$ en neem een omgeving U van y . Omdat y niet geïsoleerd is, is er een $y \neq z \in U$. Zij V een omgeving van z waar y niet in ligt. Omdat $\mathcal{O}^+(x)$ dicht ligt, is er een punt $f^n(x) \in V \cap U$. Dus in elke omgeving van y ligt een punt $f^n(x)$ verschillend van y : $y \in \omega(x)$.

De afbeelding $x \mapsto x + 1$ op \mathbb{R} geeft aan dat dit niet geldt voor ruimten met geïsoleerde punten.

4. Zij $T : X \rightarrow X$ een homeomorfisme op een compacte metrische ruimte X . Neem aan dat T topologisch transitief is: voor alle open verzamelingen U, V , is er een $n \in \mathbb{Z}$ zodat $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Bewijs dat de verzameling punten $\{x \in X \mid \mathcal{O}(x) \text{ ligt dicht in } X\}$ residuaal is, d.w.z. bevat is in een aftelbare doorsnijding van open en dichte verzamelingen.

Voor elke gehele $n > 0$, kies punten $x_1, \dots, x_k(n)$ zodat de $\frac{1}{n}$ -bollen rond deze punten X overdekken. Dit levert een reeks bollen B_1, \dots met afnemende straal op. Beschouw $\bigcap_{i>0} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(B_i)$. De baan van een punt hieruit doorsnijdt elke bol B_i .

Notatie:

Voor een afbeelding $T : X \rightarrow X$ schrijven we $\mathcal{O}^+(x) = \{T^i(x) \mid i \in \mathbb{N}\}$. Voor een inverteerbare afbeelding, $\mathcal{O}(x) = \{T^i(x) \mid i \in \mathbb{Z}\}$.