Tentamen
Dynamische Systemen
Mei 2007

1. Laat zien dat de rotatie $R_\alpha(x) = x + \alpha \mod 1$ op de cirkel $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, voor $\alpha$ irrationaal, minimaal is.

2. Beschouw een hyperbolisch torus automorfisme gegeven door een niet singuliere matrix $A$ met gehele coëfficienten (hyperbolisch betekent dat de modulus van de eigenwaarden niet 1 is). Laat zien dat de stabiele en onstabiele variëteiten (de projectie naar de torus van de eigenruimten van $A$) dicht liggen op de torus. Hint: Bereken de eigenvectoren van $A$ en gebruik de eerste opgave.

3. Beschouw een continue afbeelding $T : X \to X$ op een Hausdorff topologische ruimte $X$. Bewijs de volgende uitspraak. Als $X$ geen geïsoleerde punten heeft en $\mathcal{O}^+(x)$ ligt dicht, dan ligt de omega-limiet verzameling $\omega(x)$ dicht. Geef een voorbeeld waarmee aangetoond wordt dat dit onjuist is als $X$ een geïsoleerd punt heeft.

4. Zij $T : X \to X$ een homeomorfisme op een compacte metrische ruimte $X$. Neem aan dat $T$ topologisch transitief is: voor alle open verzamelingen $U, V$, is er een $n \in \mathbb{Z}$ zodat $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Bewijs dat de verzameling punten $\{x \in X \mid \mathcal{O}(x) \text{ ligt dicht in } X\}$ residuaal is, d.w.z. bevat is in een aftelbare doorsnijding van open en dichte verzamelingen.

Notatie:

Voor een afbeelding $T : X \to X$ schrijven we $\mathcal{O}^+(x) = \{T^i(x) \mid i \in \mathbb{N}\}$. Voor een inverteerbare afbeelding, $\mathcal{O}(x) = \{T^i(x) \mid i \in \mathbb{Z}\}$.