

Dynamische Systemen

- Zij f een continue afbeelding van $[0, 1]$ naar zichzelf. Bewijs de volgende uitspraak: als f een periodiek punt heeft dat geen dekpunt is, dan heeft f een periodiek punt van periode twee. Maak gebruik van de volgende redeneringen.

Schrijf $x_1 < \dots < x_p$ voor de punten in een periodieke baan van periode $p > 2$. Schrijf $I_j = [x_j, x_{j+1}]$, $1 \leq j < p$, voor de tussenliggende intervallen. Schrijf $I_i \rightarrow I_j$ als $I_j \subset f(I_i)$.

- Laat zien dat voor elk interval I_i , er een ander interval I_j is met $I_i \rightarrow I_j$.
- Laat zien dat er een rij $I_{i_1} \rightarrow I_{i_2} \rightarrow \dots \rightarrow I_{i_q} \rightarrow I_{i_1}$ bestaat voor een $q < p$. Concludeer het bestaan van een periodiek punt van periode q .

- Zij $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -5x + 4, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$

Schets de grafiek van f en laat zien dat -1 een periodiek punt van periode drie is.

Voor een twee bij twee 0-1 matrix $A = (a_{ij})$, laat Σ_A de deelverzameling van $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ zijn van rijtjes $\omega = \{\omega_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ met $a_{\omega_i \omega_{i+1}} = 1$. Schrijf $\sigma : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ voor de linker schuifoperator beperkt tot Σ_A .

Laat zien dat er een topologische conjugatie is van f beperkt tot de invariante verzameling $\bigcap_{i \geq 0} f^i([-1, 1])$ met σ , geef de correcte matrix A .

- Voor een 0-1 matrix $A = (a_{ij})$ en de bijbehorende linker schuifoperator $\sigma : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$, geeft het spoor van A^n het totaal aantal periodieke punten met periode een deler van n . Geef aan waarom dit zo is. Bereken het aantal periodieke banen van periode 4 en 5 voor de functie van de vorige opgave.