

Operatoralgebra's en quantummechanica

Na een voorbereidingsperiode van 25 jaar werd in 1925 de beslissende stap van de klassieke natuurkunde naar de quantumfysica gezet. Het onderliggende formalisme werd oorspronkelijk in twee ogenschijnlijk geheel verschillende versies ontdekt: in de ene draaide alles om een lineaire partiële differentiaalvergelijking (Schrödinger), en in de andere speelden oneindige matrices een hoofdrol (Heisenberg). Dit fascineerde David Hilbert, die onmiddellijk een seminarium aan de quantummechanica wijdde (in 1900 had hij overigens in zijn Zesde Probleem al opgeroepen tot de wiskundige axiomatisering van de natuurkunde). Dit seminarium werd mede bijgewoond door Hilbert's toen nog zeer jonge assistent Johann von Neumann, die zich eigenlijk vooral bezighield met de verzamelingenleer. Toch zag dit Hongaarse ex-wonderkind al snel in dat de toen nog prille theorie van Hilbertruimten precies het juiste raamwerk voor de quantumtheorie vormde; de twee bekende versies hiervan bleken eenvoudig door een unitaire transformatie samen te hangen. In 1932 verscheen von Neumann's *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, waarin de definitieve theorie van lineaire afbeeldingen op Hilbertruimten staat. Dit boek is een schitterend voorbeeld van de kruisbestuiving tussen de wis- en de natuurkunde.

Von Neumann leverde in dezelfde periode fundamentele bijdragen tot de maattheorie en de abstracte functionaalanalyse, en was tevens geïnteresseerd in de theorie van groepsrepresentaties, de projectieve meetkunde, en de theorie van tralies (lattices). Vervolgens schiep hij de theorie van operatoralgebra's op Hilbertruimten, waarin al deze gebieden in zekere zin worden samengebracht en gegeneraliseerd (de wiskundige Irving Segal noemde deze theorie "perhaps the most original major work in mathematics in the twentieth century"). Nu komen we bij iets raars. Hoewel von Neumann al in de dertiger jaren een wiskundige van wereldfaam was, en later

ook buiten de wiskunde beroemd zou worden door zijn werk aan de wiskundige economie, de atoombom, en de computer, sloeg zijn theorie van operatoralgebra's in eerste instantie bepaald niet aan. Slechts een handvol wiskundigen slaagde erin de theorie te doorgronden, velen namen de moeite niet eens, en de fysici lieten het indertijd, ondanks de duidelijke motivatie uit de quantumtheorie, helemaal afweten. Zelfs zijn vriend (en latere 'partner in crime' in Los Alamos) Stan Ulam, zelf een vooraanstaand wiskundige, vond dat Johnny zijn tijd maar aan het verdoen was.

Tegenwoordig werken honderden wiskundigen en mathematisch fysici aan von Neumannalgebra's (i.e., operatoralgebra's op Hilbertruimten), en blijkt zo'n beetje de halve wiskunde hier iets mee te maken te hebben. Zo zijn er diepe verbanden met onder meer knopentheorie, waarschijnlijkheidstheorie, ergodentheorie, algebraïsche topologie, graphentheorie, getaltheorie (er loopt een poging de Riemannhypothese m.b.v. operatoralgebra's te bewijzen), en meetkunde. Vooral het laatste is enorm in de mode; men spreekt van niet-commutatieve meetkunde. Hiermee wordt bedoeld dat constructies uit de meetkunde (en de topologie) eerst worden geherformuleerd zodat ze niet naar een meetkundige ruimte verwijzen maar naar een bepaalde collectie van functies op die ruimte. Vervolgens worden deze functies, die een commutatieve algebra vormen, vervangen door operatoren op een Hilbertruimte (die i.h.a. niet met elkaar commuteren, vandaar de naam). In 1982 won Alain Connes de Fields Medal (de hoogste prijs in de wiskunde voor onderzoekers onder de 40) voor zijn classificatie van von Neumannalgebra's, en in 1990 won Vaughan Jones deze prijs vanwege zijn nieuwe knopeninvariant, die hij op sensationele wijze uit de theorie van von Neumannalgebra's had weten af te leiden.

Hoe kon een vrijwel vergeten gebied een zo dramatische comeback maken? Allereerst heeft een handjevol pioniers het onderwerp vanaf het eind van de jaren dertig, toen von Neumann zich feitelijk uit de zuivere wiskunde terugtrok, telkens boven water weten te houden (Dixmier, Kadison). Ten tweede zag een groepje mathematisch fysici rond Rudolf Haag in de jaren zestig in dat een

wiskundig correcte formulering van de quantumtheorie van systemen met oneindig veel vrijheidsgraden (zoals veldentheorieën en oneindig uitgestrekte thermodynamische systemen) m.b.v. operatoralgebra's mogelijk en nuttig was. Beide ontwikkelingen convergeerden in 1967, toen wiskundigen en fysici onafhankelijk van elkaar, maar wederzijds geïnspireerd, een belangrijke nieuwe techniek ontdekten die de studie van von Neumannalgebra's enorm vereenvoudigde en verdiepte. Als derde moet hier wederom de persoon van Alain Connes worden genoemd, die vanaf 1973 een groot aantal briljante ideeën en methoden aan het gebied heeft toegevoegd. Tenslotte zien we dat de investering van von Neumann met zeer hoge rente is terugverdiend. Er was een lange incubatietijd, maar zijn theorie was zo veelbelovend, en zijn intuïtie zo diep, dat het er gewoonweg van moest komen.

Mijn persoonlijke betrokkenheid bij de operatoralgebra's is via een omweg tot stand gekomen. Als natuurkundestudent aan de UvA (oude stijl) kon het college functionaalanalyse (van Lekkerkerker) mij maar matig boeien, en beleefde ik meer plezier aan een afstudeeropdrachtje Liegroepen bij van Est voor het bijvak wiskunde. Mijn promotieonderzoek bij het Instituut voor Theoretische Fysica van de UvA ging over de quantumveldentheorie. Ik gebruikte daarin een heuristische techniek die was bedacht door een vriend van de bovengenoemde Haag, met wiens werk ik daardoor voor het eerst in contact kwam. Mijn proefschrift (1989) bevat aldus een paar triviale stapjes in de operatoralgebra's.

Toen ik als postdoc naar Cambridge (UK) ging, werd van mij niettemin verwacht dat ik echte fysica zou gaan doen. In 1990 verhuisde evenwel de wereldberoemde meetkundige Michael Atiyah van Oxford naar Cambridge, met in zijn kielzog Graeme Segal en Nigel Hitchin. Ook Raoul Bott was regelmatig op bezoek. Atiyah was toen al geruime tijd een soort wiskundige mentor voor de geniale fysicus Ed Witten, die omgekeerd Atiyah steeds verder naar de mathematische fysica dreef. Deze groep stal dermate de show dat het mij duidelijk was dat ik verder ook mathematische fysica wilde doen (een natuurkunde conferentie die ik rond die tijd bezocht,

waarin experimenteel en theoretisch fysici voortdurend door elkaar heen schreeuwden, speelde eveneens een rol in deze keuze). Ik kreeg na twee jaar assistentschap een vijfjarige aanstelling, zodat ik ook ruim de tijd had voor deze omschakeling.

Hoe inspirerend Atiyah en zijn geometrische constructies ook mochten zijn, ik kreeg de indruk dat hij probeerde de quantumtheorie geheel op de leest van de klassieke meetkunde te schoeien. De ideeën van von Neumann, die in zekere zin intrinsiek quantummechanisch zijn, speelden geen rol. Mede om die reden besloot ik voortijdig uit Cambridge weg te gaan om mijn geluk in Hamburg te beproeven, waar Haag nog altijd rondliep. Daar wisten ze inderdaad alles van von Neumannalgebra's, zodat ik me wat dat betreft uitstekend op mijn plaats voelde. Aan de andere kant was in Duitsland onder de fysici destijds nauwelijks tot geen belangstelling voor de meetkundige aanpak van Atiyah en Witten, en zelfs niet voor de prachtige modellen in de quantumveldentheorie die laatstgenoemde heeft ontwikkeld. Dus daar eigenlijk ook weer de halve waarheid. Het is overigens opvallend hoe sterk de wetenschappelijke cultuur, inclusief modellen, technieken, waarheidsbegrip, en idealen van land tot land kan verschillen!

Mede vanwege het ontluisterende sociale leven in Hamburg ben ik toen weer teruggegaan naar Cambridge, hetgeen wat dat betreft een paradijs is. Maar ik kon ook daar wetenschappelijk mijn draai niet echt meer vinden, en was in zekere zin blij dat mijn contract in 1997 afliep, zodat ik gedwongen werd naar andere mogelijkheden om te zien. Robbert Dijkgraaf, de hoogleraar wiskundige fysica aan het KdV Instituut, ondersteunde een aanvraag bij de KNAW, zodat ik sinds 1 juli 1997 in Amsterdam als academie-onderzoeker werkzaam ben. Ik heb sindsdien een klein onderzoeksgroepje tussen de operatoralgebra's en de quantummechanica opgebouwd, en verzorg jaarlijks een caputcollege op dit gebied.

Wie wat meer hierover wil weten zou eens kunnen kijken op mijn homepage <http://turing.wins.uva.nl/~npl/>, waarop ook vele links staan naar websites met informatie over operatoralgebra's. Een 'klassiek' boek over de moderne quantumtheorie in het licht van

operatoralgebra's is *Local Quantum Physics* van Rudolf Haag (2nd ed., Springer, 1996). Het gedachtengoed van Atiyah en Witten staat daarentegen beschreven in *Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians*, eds. P. Deligne et al., 2 Vols. (AMS, Providence, 1999).

Klaas Landsman