Bepalende symmetrieën

Ondanks mijn 'jonge' leeftijd van 35 jaar ben ik al vele jaren werkzaam (geweest) op het KdV Instituut. Gedurende de periode 1994-1998 was ik promovendus bij Tom Koornwinder, om vervolgens, na enkele jaren als post-doc in Frankrijk te hebben doorgebracht, in 2000 terug te keren als onderzoeksfellow (KNAW) in de groep van Eric Opdam. Sinds begin 2005 ben ik universitair docent en coördineer ik een onderzoeksprojekt (NWO-VIDI) getiteld *Bepalende symmetrieën*, waarin de fundamentele wiskundige structuren van systemen met voorspelbaar tijdsverloop worden onderzocht.

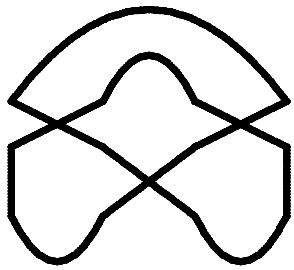
Geheel voorspelbare systemen zijn zo uitzonderlijk dat ze tot enige verwondering leiden als je er in het dagelijkse leven mee in aanraking komt. Via internet heb ik onlangs een aloud speeltje aangeschaft dat hier een typisch voorbeeld van geeft. Het bestaat uit een rijtje van zes aan koordjes hangende metalen bolletjes. Als nu bijvoorbeeld twee bolletjes aan de linkerkant opzij worden getrokken en los worden gelaten, dan voltrekt zich een uiterst voorspelbaar en simpel schouwspel: nadat de twee losgelaten bolletjes tegen de stilhangende vier rechter bolletjes botsen, worden de twee meest rechtse bolletjes gelanceerd en blijven de vier linker bolletjes stil hangen, waarna dit patroon zich op evidente wijze herhaalt. In het bijzonder kan je na verloop van tijd nog direct zien wat het aantal losgelaten bolletjes was. Zelfs mijn zoontje Hugo van 1 jaar (die ik nog niet zover heb dat hij kan tellen), kijkt altijd weer gefascineerd naar dit schouwspel!

Een ander interessant voorbeeld is gerelateerd aan de Korteweg-de Vries vergelijking, die onder andere de golfvoortplanting in ondiepe smalle kanalen beschrijft. Belangrijke oplossingen zijn zogeheten solitonen, die door John Scott Russell nauwkeurig experimenteel onderzocht en beschreven werden nadat hij ze in 1834 had waargenomen in een kanaal tussen Edinburgh en Glasgow. Solitonen zijn

gelokaliseerde, vormvaste golfjes die zich met constante snelheid voortbewegen en die zich als 'solitaire' bolletjes gedragen: als een soliton een ander soliton achterhaalt, dan doet dit zich voor als een botsing waarbij de snelheden (en daarmee ook de vormen) van de solitonen uitgewisseld worden. Een andere manier om hier tegenaan te kijken is dat de snel voortbewegende soliton de trage soliton 'inhaalt' en dat na passering de twee solitonen geen noemenswaardige veranderingen van vorm en snelheid hebben ondergaan. Solitonen en hun historie zijn vaak in de literatuur en op internet besproken, onder andere in de nieuwsbrief van april 1999 door Eduard de Jager en op de web-site van Alex Kasman:
http://math.cofc.edu/faculty/kasman/SOLITONPICS/index.html
waarop ook fraaie animaties van solitonen te vinden zijn.

Uit bovenstaande omschrijvingen zal het u niet verbazen dat het voorbeeld van solitonen iets te maken heeft met het speeltje uit het eerste voorbeeld. In het bijzonder is het aannemelijk dat de verwondering in beide gevallen het gevolg is van de buitengewone eenvoud en voorspelbaarheid van de tijdsevolutie. Deze uitzonderlijke voorspelbaarheid blijkt het gevolg te zijn van een fundamenteel onderliggend basisprincipe, die zich voor de solitonoplossingen van de Korteweg-de Vries vergelijking grofweg als volgt laat omschrijven: het gevolg van onderlinge botsingen tussen solitonen is onafhankelijk van de volgorde waarin de botsingen zich voordoen. Ik moet hier altijd aan denken als ik Sinterklaas- of Kerstinkopen doe, waarbij ik me zo snel mogelijk door de mensenmassa's heen probeer te manoeuvreren; ik ervaar de vertragende werking van de vele mensen in de winkelstraten, maar ik herinner me niet de volgorde waarin ik de verschillende mensen ben tegengekomen.

Globale invariantie onder lokale verwisseling van botsingsvolgorde is een gevolg van het feit dat de botsingsdata aan de Yang-Baxter vergelijking voldoen. Ik zal in dit stukje de Yang-Baxter vergelijking niet expliciet definiëren maar me beperken tot het geven van nog een prachtig voorbeeld waarin de Yang-Baxter vergelijking een soortgelijke opmerkelijke rol heeft gespeeld, en dat is in de knopentheorie (de theorie van inbeddingen van de cirkel in $\mathbb{R}^3$), zie bijvoorbeeld http://katlas.math.toronto.edu/wiki/Main_Page, The Knot Atlas, voor veel informatie over knopen en voor fraaie plaatjes. Om de analogie met de vorige voorbeelden zo veel mogelijk vast te houden, projecteren we eerst een gegeven knoop op het platte vlak. Zo is



een knoopprojectie, bijvoorbeeld van de klaverbladknoop (om alle topologische informatie van de knoop te behouden moet je bij iedere kruising aangeven wat het bovenliggende lijnstuk is, iets wat we hier voor het gemak weglaten). We interpreteren de projectie als een weergave van gebeurtenissen van deeltjes op een lijn. We beschouwen hiervoor de vertikale richting als de tijdrichting, zodat horizontaal de positie van de deeltjes op de lijn weergeeft. Iedere projectie van de knoop vertelt dan dus een reeks gebeurtenissen waarbij paarsgewijs deeltjes gecreëerd worden (weergegeven door $\cup$), deeltjes elkaar kruisen (weergegeven door $\times$), en deeltjes elkaar paarsgewijs opheffen (weergegeven door $\cap$). Bovenstaand voorbeeld van een knoopprojectie encodeert dus de volgende gebeurtenissen: deeltjes 1 en 2, en deeltjes 3 en 4, worden paarsgewijs gecreëerd (we nummeren de deeltjes van links naar rechts), dan kruisen deeltjes 2 en 3, deeltjes 1 en 3, en deeltjes 2 en 4, vervolgens heffen deeltjes 1 en 4, en deeltjes 2 en 3, elkaar paarsgewijs op. Nu is het doel om lokaal aan iedere gebeurtenis in de projectie op zo'n manier data toe te kennen dat de resulterende uitkomst voor de gehele knoopprojectie niet afhangt van elastische verbuigingen van de oorspronkelijke knoop (met andere woorden, de uitkomst is een topologische invariant van de knoop). De eis van topologische invariantie laat zich opnieuw omschrijven in termen van concrete condities op de toegekende data, waaronder de eis dat de toegekende data aan de kruisingen aan de Yang-Baxter vergelijking moeten voldoen.

De wiskundige structuren die ten grondslag liggen aan voorspelbare systemen, zoals bovengenoemde Yang-Baxter vergelijking, hebben in de afgelopen decennia een enorme invloed gehad op verschillende gebieden binnen de wiskunde en de mathematische fysica. In het projekt *Bepalende symmetrieën* richten we ons voornamelijk op de analyse van voorspelbare systemen met behulp van representatietheorie van quantumgroepen (deformaties van Lie groepen) en Hecke algebra's (deformaties van spiegelingsgroepen), wat krachtige methoden oplevert om oplossingen van gegeneraliseerde Yang-Baxter vergelijkingen te construeren. Het zal u al met al dus niet verbazen dat ik met extra grote verwondering naar dat speeltje met de zes metalen bolletjes kijk, me realiserend wat voor prachtige wiskunde aan dit eenvoudige mechanisme ten grondslag ligt!

Jasper Stokman
jstokman@science.uva.nl