Summation der n ersten Glieder der binomischen Reihe mittelst der Theorie der hypergeometrischen Reihen

A. G. Hering

Programm der Realschule in Chemnitz, 1868

Summation der n ersten Glieder der binomischen Reihe mittelst der Theorie der hypergeometrischen Reihen.

I.

Hat eine Reihe die Eigenschaft, dass der Quotient zweier auf einander folgender Glieder auf die Form

$$\frac{n^p + \alpha_1 n^{p-1} + \cdots + \alpha_p}{n^p + \beta_1 n^{p-1} + \cdots + \beta_p} x$$

gebracht werden kann, worin -1 eine Wurzel des Nenners sein muss, so heisst sie eine hypergeometrische. Sind in diesem Quotienten $-a_1, -a_2 \ldots - a_p$, und $-b_1, -b_2 \ldots - b_{p-1}$ die Wurzeln bezüglich des Zählers und des Nenners, so kann man ihn schreiben:

$$\frac{(n+a_1)(n+a_2)\ldots(n+a_p)}{(n+b_1)(n+b_2)\ldots(n+b_{p-1})(n+1)} x.$$

Hieraus ergiebt sich die allgemeine Form einer hypergeometrischen Reihe, deren erstes Glied die Einheit ist; sie ist:

$$1 + \frac{a_1 a_2 \ldots a_p}{b_1 b_2 \ldots b_{p-1} 1} x + \frac{a_1(a_1+1) a_2(a_2+1)\ldots a_p(a_p+1)}{b_1(b_1+1) b_2(b_2+1)\ldots b_{p-1}(b_{p-1}+1) 1.2} x^2 + \cdots$$

In ihr heissen $a_1, a_2 \ldots a_p, b_1, b_2 \ldots b_{p-1}$ ihre Elemente und p giebt den Grad der hypergeometrischen Reihe an.

Bezeichnet $\Gamma(m) = (m-1)\,\Gamma(m-1)$ das Euler'sche Integral zweiter Gattung, so kann man die eben angegebene Reihe schreiben:

$$\frac{\Gamma(b_1)\,\Gamma(b_2)\ldots\Gamma(b_{p-1})}{\Gamma(a_1)\,\Gamma(a_2)\ldots\Gamma(a_p)} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_1+q)\,\Gamma(a_2+q)\ldots\Gamma(a_p+q)}{\Gamma(b_1+q)\,\Gamma(b_2+q)\ldots\Gamma(b_{p-1}+q)\,\Gamma(q+1)} x^q,$$

woraus erhellt, dass die Theorie der hypergeometrischen Reihen wesentlich mit der der sogenannten Gammafunctionen zusammenhängt.

II.

Die hypergeometrischen Reihen wurden schon frühzeitig von den Mathematikern einer näheren Betrachtung unterworfen, weil in denselben die in der Analysis häufig vorkommenden Reihen für Binome, Exponentialgrössen, Logarithmen, trigonometrische Functionen*) u. s. w. als specielle Fälle enthalten sind. Hat z. B. schon Wallis derselben Erwähnung gethan, so hat doch zuerst der um die Mathematik überhaupt, aber besonders um die Analysis hochverdiente Euler in den Actis Academiae Petropol.**) Beziehungen zwischen hypergeometrischen Reihen mit verschiedenen Elementen, die unter dem Namen der Euler'schen Transformationen bekannt sind, aufgestellt. Diese Transformationen wurden im Jahre 1797 wieder von Pfaff***) abgeleitet, der die hypergeometrischen Reihen vom zweiten Grade, besonders für die Fälle, dass das erste Element eine negative ganze Zahl, die Reihe selbst also eine endliche ist, und dass $\alpha = -1$, sowie eine hypergeometrische Reihe dritten Grades†), in der eine besondere Beziehung zwischen dem fünften und den ersten drei Elementen stattfindet und α der positiven Einheit gleich ist, einer näheren Betrachtung unterzieht.

Epoche machend in der Geschichte der hypergeometrischen Reihen ist die bereits genannte Abhandlung von Gauss, in welcher mannigfache Beziehungen zwischen drei hypergeometrischen Reihen zweiten Grades, zwischen den Differentialquotienten derselben, die Entwickelung des Quotienten zweier hypergeometrischen Reihen, deren zweites und drittes Element um die Einheit verschieden sind, in einen Kettenbruch, Bemerkungen über den Werth der hypergeometrischen Reihen, deren viertes Element der positiven Einheit gleich ist, und über die sogenannten Gammafunctionen enthalten sind.

Reich an interessanten Sätzen über die hypergeometrischen Reihen ist die umfangreiche Abhandlung von Kummer††), in der nach allgemeinen Betrachtungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe, nach eingehender Beleuchtung der Transforma-

---

*) Gauss giebt in den Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma} x + \cdots$ § 5 in den Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis Vol. II v. J. 1813, 23 Reihen an, die auf die hypergeometrischen Reihen zurückzuführen sind.

**) cf. Euler's Anleitung zur Integralrechnung Bd. 4, wo sich auch die Abhandlung über die sogenannten Euler'schen Integrale befinden.

***) Nova acta acad. imper. Petrop. Tom. XI p. 37 seqq.

†) ibid. p. 51; cf. Jacobi, de seriebus ac diff. etc. Crelle's Journal 1848 Bd. 36 p. 138.

††) Crelle's Journal Bd. 15, Heft 1 u. 2. 1836.

tionsformeln und ihrer Zusammengehörigkeit und nach Ableitung neuer Beziehungen zwischen hypergeometrischen Reihen, deren Elemente in gewisser Abhängigkeit von einander stehen, auch der Fall, dass das vierte Element imaginär, sowie die hypergeometrischen Reihen dritten Grades Berücksichtigung finden.

Von den späteren Abhandlungen sind noch besonders die von Jacobi*), Heine**) und Riemann***), welcher letztere, das vierte Element als complex voraussetzend, auf eine von der seiner Vorgänger verschiedene, d. h. bei Weitem allgemeinere Weise zu den Eigenschaften und Transformationsformeln der hypergeometrischen Reihen gelangt, zu erwähnen.

Der Behandlung der gestellten Aufgabe schicke ich nun in Betreff der Theorie der Gammafunctionen sowohl als der der hypergeometrischen Reihen einige Bemerkungen und Sätze voraus, welche in den späteren Untersuchungen zur Anwendung gelangen.

III.

Wir bezeichnen mit Gauss die hypergeometrische Reihe zweiter Ordnung, deren Elemente a, b, c und x seien, und welche also die Form:

$$1 + \frac{a\,b}{1.\,c}\,x + \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{1.\,2.\,c(c+1)}\,x^2 + \cdots$$

hat, mit $F(a, b, c, x)$. Zu ihrer Convergenz ist nothwendig, dass mod. $x < 1$†) und für $x = 1$ dass $a + b - c < 0$††) ist. Die Reihe ist eine endliche und bricht beim $(l+1)^{\text{ten}}$ Gliede ab, wenn eins der beiden ersten Elemente, z. B. a, eine ganze negative Zahl $= -l$ ist, während, wenn das dritte Glied eine ganze negative Zahl, also $c = -m$ ist, die Glieder nach dem $(m+1)^{\text{ten}}$ Gliede unendlich gross werden.

Sind gleichzeitig eins der ersten Elemente und das dritte Element negative, ganze Zahlen, also $a = -l$ und $c = -m$, so bricht, wie die Betrachtung der Reihe zeigt, dieselbe, wenn $l < m$, eher ab, als die Nenner der Glieder Null, sie selbst also unendlich gross werden; sie erhält dagegen unendlich grosse Glieder, wenn $m < l$ ist.

Die durch die Function $F(a, b, c, x)$ — welche ich kurz Ffunction nennen werde — dargestellte Reihe hört aber für $m > l$ nicht auf,

---

*) Crelle's Journal 1848 Bd. 36 u. 1859 Bd. 56.

**) ibid. 1860 Bd. 57.

***) Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Bd. 7, 1856/57.

†) Gauss, disquisitiones generales circa etc. § 3.

††) ibid. § 15 extr.

eine unendliche zu sein. Von dem m^{ten} Gliede an nämlich erhalten die Glieder die Form $\frac{0}{0}$ und es ergiebt sich dann, dass, weil für $m > l$

$$\sum_{q=0}^{\infty} \frac{\Gamma(q-l)\,\Gamma(q+b)}{\Gamma(q-m)\,\Gamma(q+1)}\,x^q = \sum_{q=0}^{l} \frac{\Gamma(q-l)\,\Gamma(q+b)}{\Gamma(q-m)\,\Gamma(q+1)}\,x^q$$

$$+ \sum_{q=m+1}^{\infty} \frac{\Gamma(q-l)\,\Gamma(q+b)}{\Gamma(q-m)\,\Gamma(q+1)}\,x^q \qquad 1)$$

ist, auch $F(-l, b, -m, x)$ in eine Reihe von l und in eine von unendlich vielen Gliedern zerfällt.

Ist $m = l$, so reducirt sich die Reihe auf eine hypergeometrische Reihe erster Ordnung sowie für $a = c$.

IV.

Der Werth von $F(a, b, c, 1)$ lässt sich aus der Gleichung:

$$(c-a-b)\sum_{q=0}^{p-1} \frac{\Gamma(a+q)\,\Gamma(b+q)}{\Gamma(c+q)\,\Gamma(q+1)} - (c-a)(c-b)\sum_{q=0}^{p-1} \frac{\Gamma(a+q)\,\Gamma(b+q)}{\Gamma(c+q+1)\,\Gamma(q+1)}$$

$$= -\frac{\Gamma(a+p)\,\Gamma(b+p)}{\Gamma(c+p)\,\Gamma(p)} \qquad 2)$$

ableiten, welche Gleichung man aus der identischen Gleichung

$$\sum_{n=0}^{p} (l_n\, s_n - l_{n+1}\, s_{n+1}) = l_0\, s_0 - l_p\, s_p$$

für

$$s_n = \frac{\Gamma(a+n)\,\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\,\Gamma(n+1)},\quad l_n = n\,(c+n-1)$$

erhält.

Lässt man nämlich in 2) p unendlich wachsen, so folgt:

$$(c-a-b)\,F(a, b, c, 1) - \frac{(c-a)(c-b)}{c}\,F(a, b, c+1, 1) =$$

$$-\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\lim_{p=\infty} \frac{\Gamma(a+p)\,\Gamma(b+p)}{\Gamma(c+p)\,\Gamma(p)} \qquad 3)$$

worin wegen $c > a + b$ die rechte Seite für unendlich wachsende p verschwindet, so dass man erhält:

$$(c-a-b)\,F(a, b, c, 1) = \frac{(c-a)(c-b)}{c}\,F(a, b, c+1, 1)$$

woraus man, wenn man der Reihe nach $c+1,\ c+2 \ldots c+n$ für c setzt, diese dadurch erhaltenen Gleichungen addirt und n unendlich wachsen lässt, bekommt:

$$F(a, b, c, 1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} \text{ *)} \qquad 4)$$

Bezeichnen wir nun die p ersten Glieder einer hypergeometrischen

*) cf. l. c. § 24.

Reihe, deren Elemente a, b, c, x sind, mit $F_p(a, b, c, x)$, so giebt Gleichung 2):

$$(c - a - b) F_p(a, b, c, 1) - \frac{(c-a)(c-b)}{c} F_p(a, b, c+1, 1)$$
$$= - \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a+p)\,\Gamma(b+p)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c+p)\,\Gamma(p)} \qquad 5)$$

Hierin wird im Allgemeinen die rechte Seite für ganze negative a oder b verschwinden, da eine Gammafunction, deren Argument eine ganze negative Zahl ist, positiv oder negativ unendlich wächst. Ist aber zugleich $p \leqq$ val. abs. a, so ist $\Gamma(a+p)$ auch unendlich gross und wir erhalten den weiter zu untersuchenden Werth

$$\frac{\Gamma(a+p)}{\Gamma(a)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Wir betrachten zur Bestimmung desselben $\frac{\Gamma(-l)}{\Gamma(-m)}$, wo l und m ganze positive Zahlen sind. Nun ist, wenn $l > m$:

$$\Gamma(-m) = (-1-m)(-2-m)\ldots(-l)\,\Gamma(-l)\,^{*})$$

also:

$$\frac{\Gamma(-m)}{\Gamma(-l)} = (-1)^{l-m}(m+1)(m+2)\ldots(l-1)\,l$$
$$= (-1)^{l-m}\frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(m+1)}$$

Wenn aber $l < m$ ist, so folgt, da andererseits

$$\Gamma(-m) = \frac{\Gamma(-l)}{(-m)(1-m)\ldots(1-l)}$$

ist:

$$\frac{\Gamma(-m)}{\Gamma(-l)} = (-1)^{l-m}\frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(m+1)}$$

folglich haben wir, m mit $m-1$, und l mit $l-1$ vertauscht:

$$\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(1-m)}{\Gamma(l)\,\Gamma(1-l)} = (-1)^{l-m}\,^{**}) \qquad 6)$$

wo m und l ganze positive Zahlen sind.

Ist nun in $\frac{\Gamma(a+p)}{\Gamma(a)}$ a eine negative, ganze Zahl $= -l$ und $l > p$, so erhalten wir mit Hülfe von 6)

$$\frac{\Gamma(p-l)}{\Gamma(-l)} = (-1)^p\frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l-p+1)}$$

Dies ist eine endliche bestimmte Grösse und es erhellt, dass in 3) die

---

*) cf. Légendre, Traité des fonctions elliptiques etc.

**) Diese Formel folgt auch aus der von Gauss in der genannten Abhandlung abgeleiteten Relation:

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1+x) = \frac{\pi}{\sin x\pi}.$$

rechte Seite für $p < -a$ nicht von selbst verschwindet, was dagegen, wie wir oben gesehen, für $p > -a$ geschieht.

Das Gesagte gilt natürlich in ganz gleicher Weise von b, wenn dieses eine negative, ganze Zahl ist.

V.

Ist $c = -h$, wo h eine positive ganze Zahl ist, so wird ganz analog dem so eben Bewiesenen

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(-h)}{\Gamma(p-h)} &= (-1)^p \frac{\Gamma(h-p+1)}{\Gamma(h+1)} && \text{für } p \leq h \\ &= \pm \infty && \text{für } p > h \end{aligned}$$

Ist gleichzeitig $a = -l$, $c = -h$, so muss, wenn die rechte Seite in 3) einen bestimmten endlichen Werth haben soll, $l < h$ sein und es wird:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(-h)\,\Gamma(p-l)}{\Gamma(-l)\,\Gamma(p-h)} &= \frac{\Gamma(l+1)\,\Gamma(h-p+1)}{\Gamma(l-p+1)\,\Gamma(h+1)} && \text{für } p < l < h \\ &= 0 && \text{für } l < p < h \\ &= (-1)^{h-l} \frac{\Gamma(l+1)\,\Gamma(p-l)}{\Gamma(h+1)\,\Gamma(p-h)} && \text{für } l < h < p \end{aligned}$$

Hieraus folgt nun, dass, wenn in $F(a, b, c, 1)$ a und c negative, ganze Zahlen sind und von der durch diese Function dargestellten Reihe p Glieder genommen werden, die Gleichung 4) gilt, wenn $-a < p < -c$ ist, indem dann in 3) die rechte Seite verschwindet.

Ist $a = c$, so verschwindet in 2) links der zweite Theil und man erhält sofort:

$$-b \sum_{q=0}^{p-1} \frac{\Gamma(b+q)}{\Gamma(q+1)} = -\frac{\Gamma(b+p)}{\Gamma(p)} \tag{7}$$

woraus folgt:

$$F_p(a, b, a, 1) = \frac{\Gamma(b+p)}{\Gamma(b+1)\,\Gamma(p)} \tag{8}$$

Nach diesen Betrachtungen ist unbedingt richtig:

$$F_{l+1}(-l, b, c, 1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c+l-b)}{\Gamma(c+l)\,\Gamma(c-b)} \tag{9}$$

Dagegen gilt:

$$\begin{aligned} F_p(-l, b, -h, 1) &= (-1)^l \frac{\Gamma(h-l+1)\,\Gamma(l-h-b)}{\Gamma(h+1)\,\Gamma(-h-b)} \\ &= \frac{\Gamma(h-l+1)\,\Gamma(h+b+1)}{\Gamma(h+1)\,\Gamma(h+b-l+1)} \end{aligned} \tag{10}$$

wenn $l < p < h$.

Für negative ganze b gilt dasselbe, wie für negative ganze a.

1.

Gehe ich nun zu der Aufgabe, die Summe der n ersten Glieder der binomischen Reihe — die, wenn wir den Exponent des Binoms als völlig beliebig annehmen, convergirt, wenn mod $x < 1$ — nach der Theorie der hypergeometrischen Reihen zu behandeln, selbst über und bezeichne ich die Summe dieser n Glieder durch $(1-x)_n^{-m}$, wo m vorerst eine beliebige Zahl bedeutet, so kann ich dieselbe entweder sogleich selbst betrachten oder den Rest der binomischen Reihe bestimmen und diesen von dem Binome abziehen.

Der erstere Weg giebt uns sofort:

$$(1-x)_n^{-m} = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m+1)}{1.2}x^2 + \cdots + \frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{(n-1)!}x^{n-1}$$

$$= \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\Gamma(m+n-q-1)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n-q)}\,x^{n-q-1} \qquad 1)$$

Die hierdurch ausgedrückte Reihe bricht beim n^{ten} Gliede von selbst ab, da für $q > n-1$ $\Gamma(n-q)$ unendlich ist; doch ist es nach dem in den vorigen §§ Gesagten nicht erlaubt, ohne Weiteres ∞ statt der obern Summationsgrenze $n-1$ zu setzen, da sich, wenn m ganz und positiv ist, die Reihe beim $(m+n-1)^{\text{ten}}$ Gliede wieder fortsetzen würde.

Da in 1) der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder:

$$\frac{n-q-1}{m+n-q-2}\,\frac{1}{x} = \frac{q-n+1}{q-m-n+2}\,\frac{1}{x}$$

ist, so folgt:

$$(1-x)_n^{-m} = \frac{x^{n-1}\,\Gamma(m+n-1)}{\Gamma(m)\,(\Gamma n)}\,F_n\left(1-n,\,1,\,2-m-n,\,\frac{1}{x}\right) \qquad 2)$$

Man erhält sofort einen andern Ausdruck für $(1-x)_n^{-m}$, wenn man die Summe der n ersten Glieder schreibt:

$$(1-x)_n^{-m} = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\Gamma(m+q)}{\Gamma(m)\,\Gamma(q+1)}\,x^q$$

d. i.

$$(1-x)_n^{-m} = F_n(\alpha,\,m,\,\alpha,\,x) \qquad 3)$$

wo α eine ganz beliebige Zahl ist.

2.

Um zu neuen Formeln zu gelangen, soll jetzt die Richtigkeit der drei Euler'schen*) Transformationsformeln für den Fall, dass nur die α ersten Glieder der hypergeometrischen Reihe betrachtet werden,

*) cf. Crelle's Journal Bd. 15 p. 54.

bewiesen werden. Wir gehen dazu aus von $F_\alpha\left(1-\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$, worin α ganz und positiv ist, β und γ aber beliebige Zahlen sein können; nur muss für den Fall, dass γ negativ und ganz ist, $-\gamma > \alpha - 1$ sein. Dann wird:

$$(1-x)^{\alpha-1} F_\alpha\left(1-\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\beta)} \sum_{q=0}^{\alpha-1} \frac{\Gamma(q-\alpha+1)\,\Gamma(q+\beta)}{\Gamma(q+\gamma)\,\Gamma(q+1)} (-x)^q (1-x)^{-(q-\alpha+1)}$$

Da hierin q nicht $> \alpha - 1$ wird, so ist $-(q-\alpha+1)$ stets eine positive Zahl $\leqq \alpha - 1$ und es hat sonach $(1-x)^{\alpha-q-1}$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, nie mehr als α Glieder; wir erhalten daher:

$$(1-x)^{\alpha-1} F_\alpha\left(1-\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\beta)} \sum_{q=0}^{\alpha-1} \sum_{p=0}^{\alpha-1} \frac{\Gamma(q-\alpha+1)\,\Gamma(q+\beta)}{\Gamma(q+\gamma)\,\Gamma(q+1)} (-x)^q \frac{\Gamma(p+q-\alpha+1)}{\Gamma(q-\alpha+1)\,\Gamma(p+1)} x^p$$

d. i.

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\beta)} \sum_{q=0}^{\alpha-1} \sum_{p=0}^{\alpha-1} \frac{\Gamma(q+\beta)\,\Gamma(p+q-\alpha+1)}{\Gamma(q+\gamma)\,\Gamma(q+1)\,\Gamma(p+1)} (-1)^q x^{p+q}$$

Setzen wir hierin $p + q = r$, also $p = r - q$, so ist zwar in Bezug auf r zwischen 0 und $q + \alpha - 1$ zu summiren; es wird aber $\Gamma(p+q-\alpha+1) = \Gamma(r-\alpha+1)$ und da:

$$\frac{\Gamma(r-\alpha+1)}{\Gamma(1-\alpha)} = (-1)^r \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-r)},$$

so erhellt, dass die Reihe für $r > \alpha - 1$ abbricht; wir können daher schreiben:

$$(1-x)^{\alpha-1} F_\alpha\left(1-\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\beta)} \sum_{q=0}^{\alpha-1} \sum_{r=0}^{\alpha-1} \frac{\Gamma(r-\alpha+1)\,\Gamma(q+\beta)}{\Gamma(q+\gamma)\,\Gamma(r-q+1)\,\Gamma(q+1)} (-1)^q x^r$$

Wir können nun hier nach dem in § V Gesagten die Summation nach q ausführen, da r den Werth $\alpha - 1$ nicht übersteigt, also $\Gamma(r-q+1)$ für $q > r$ d. i. für $q > \alpha - 1$ unendlich wird, und wir erhalten:

$$(1-x)^{\alpha-1} F_\alpha\left(1-\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{r=0}^{\alpha-1} \frac{\Gamma(r-\alpha+1)}{\Gamma(r+1)} F_\alpha(-r, \beta, \gamma, 1)\, x^r$$

Dies ist nach V)

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)} \sum_{r=0}^{\alpha-1} \frac{\Gamma(r-\alpha+1)\,\Gamma(r+\gamma-\beta)}{\Gamma(r+\gamma)\,\Gamma(r+1)} x^r,$$

woraus folgt:

$$(1-x)^{\alpha-1} F_\alpha\left(1-\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right) = F_\alpha(1-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x)$$

oder durch Vertauschung von $\frac{x-1}{x}$ mit x:

$$F_\alpha\left(1-\alpha, \beta, \gamma, \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^{\alpha-1} F_\alpha\left(1-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{1}{1-x}\right) \quad \text{I)}$$

entsprechend der Euler'schen Transformationsformel:

$$F(a, b, c, x) = (1-x)^{-a} F\left(a, c-b, c, \frac{x}{x-1}\right)$$

aus welcher sich durch Vertauschung von a und b die zweite ergiebt, nämlich:

$$F(a, b, c, x) = (1-x)^{-b} F\left(c-a, b, c, \frac{x}{x-1}\right).$$

Diese Vertauschung ist aber in unserem Falle nicht ohne Weiteres erlaubt, da I) unter der Voraussetzung abgeleitet wurde, dass a ganz und negativ, b aber beliebig. Im folgenden § soll aber eine dieser letzteren Formel entsprechende aufgestellt werden, wobei sich aber zeigen wird, dass, während sich die eben angeführte Gleichung für $c = a$ auf $(1-x)^{-b}$ reducirt, dies bei unserer Formel nicht stattfindet.

3.

Wir gehen aus von:

$$(1-x)^{-\beta} F_\alpha\left(1-\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\beta)} \sum_{q=0}^{\alpha-1} \frac{\Gamma(q-\alpha+1)\,\Gamma(q+\beta)}{\Gamma(q+\gamma)\,\Gamma(q+1)} (-x)^q (1-x)^{-(q+\beta)}$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\beta)} \sum_{q=0}^{\alpha-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(q-\alpha+1)\,\Gamma(p+\beta+q)}{\Gamma(q+\gamma)\,\Gamma(q+1)\,\Gamma(p+1)} (-1)^q x^{p+q};$$

$p = r - q$ giebt:

$$(1-x)^{-\beta} F_\alpha\left(1-\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\beta)} \sum_{q=0}^{\alpha-1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(q-\alpha+1)\,\Gamma(r+\beta)}{\Gamma(q+\gamma)\,\Gamma(q+1)\,\Gamma(r-q+1)} (-1)^q x^r.$$

Mit Rücksicht auf § V erhalten wir durch die Summation nach q:

$$(1-x)^{-\beta} F_\alpha\left(1-\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+\beta)}{\Gamma(r+1)} F_\alpha(1-\alpha, -r, \gamma, 1) x^r$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma+\alpha-1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+r+\alpha-1)\,\Gamma(r+\beta)}{\Gamma(\gamma+r)\,\Gamma(r+1)} x^r = F(\gamma+\alpha-1, \beta, \gamma, x)$$

oder nach Vertauschung von x mit $\frac{1}{1-x}$:

$$F_\alpha\left(1-\alpha, \beta, \gamma, \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^{-\beta} F\left(\gamma+\alpha-1, \beta, \gamma, \frac{1}{1-x}\right). \quad \text{II)}$$

Die Gleichsetzung der rechten Seiten in I) und II) giebt, wenn $\gamma-\beta$ für β, und x für $1-x$ gesetzt wird:

$$F_\alpha\left(1-\alpha, \beta, \gamma, \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^{\gamma-\beta+\alpha-1} F\left(\gamma+\alpha-1, \gamma-\beta, \gamma, \frac{1}{x}\right) \quad \text{III)}$$

welche Formel der dritten Euler'schen Transformationsformel:

$$F(a, b, c, x) = (1-x)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c, x)$$

entspricht, sowie II) der zweiten.

Die Beweisführung für II) und III) gilt auch für den Fall, dass $\gamma = 1-\alpha$, in welchem Falle das erste Element rechts verschwindet; gleichzeitig ist aber auch das dritte Element negativ und vom α^{ten} Gliede an erhalten Werthe der Glieder die Form $\frac{0}{0}$, was eine nähere Betrachtung nothwendig macht.

Nach der Erklärung der Ffunctionen ist allgemein:

$$F\left(c+\alpha-1, b, c, \frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{(c+\alpha-1)\, b}{1.\, c}\, \frac{1}{x} + \cdots$$

$$+ \frac{(c+\alpha-1)(c+\alpha)\ldots(c+2\alpha-3)\, b\,(b+1)\ldots(b+\alpha-2)}{(\alpha-1)!\; c\,(c+1)\ldots(c+\alpha-2)} \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}$$

$$+ \frac{(c+\alpha-1)(c+\alpha)\ldots(c+2\alpha-2)\, b\,(b+1)\ldots(b+\alpha-1)}{\alpha!\; c\,(c+1)\ldots(c+\alpha-1)} \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}$$

$$+ \frac{(c+\alpha-1)(c+\alpha)\ldots(c+2\alpha-1)\, b\,(b+1)\ldots(b+\alpha)}{(\alpha+1)!\; c\,(c+1)\ldots(c+\alpha)} \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1} + \cdots\cdots$$

Hierin heben sich vom $(\alpha+1)^{\text{ten}}$ Gliede an in Zähler und Nenner die Factoren $c+\alpha-1$; wir erhalten daher für $c = 1-\alpha$:

$$F\left(0, b, 1-\alpha, \frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{(\alpha-1)!\; b\,(b+1)\ldots(b+\alpha-1)}{\alpha!\;(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots-1} \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}$$

$$+ \frac{\alpha!\; b\,(b+1)\ldots(b+\alpha)}{(\alpha+1)!\;(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots-1.\,1} \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{\Gamma(b+a)}{\Gamma(b)\,\Gamma(\alpha+1)} \left(-\frac{1}{x}\right)^{\alpha} \left\{1 + \frac{\alpha\,(b+\alpha)}{1.\,(\alpha+1)}\, \frac{1}{x} + \cdots\right\}$$

$$= 1 - \frac{\Gamma(b+a)}{\Gamma(b)\,\Gamma(\alpha+1)} \left(-\frac{1}{x}\right)^{\alpha} F\left(\alpha, b+\alpha, \alpha+1, \frac{1}{x}\right).$$

Hiernach werden II) und III) für $\gamma = 1-\alpha$

$$F_\alpha\left(1-\alpha, \beta, 1-\alpha, \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(\frac{x-1}{x}\right)^{-\beta} \left\{1 - \frac{\Gamma(\beta+\alpha)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{-1}{1-x}\right)^{\alpha} F\left(\alpha, \beta+\alpha, \alpha+1, \frac{1}{1-x}\right)\right\} \quad \text{II*)}$$

und:

$$F_\alpha\left(1-\alpha,\,\beta,\,1-\alpha,\,\frac{1}{x}\right)$$
$$=\left(\frac{x-1}{x}\right)^{-\beta}\left\{1-\frac{\Gamma(\beta+\alpha)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}F\left(\alpha,\,1-\beta,\,\alpha+1,\,\frac{1}{x}\right)\right\}\quad \text{III*)}$$

4.

Im Folgenden gebe ich noch die Ableitung von drei für negative, ganze erste Elemente geltende Transformationsformeln und betrachte dazu zunächst:

$$(1-x)^{\alpha-1}F_\alpha\left(1-\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\frac{1}{1-x}\right)$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\beta)}\sum_{q=0}^{\alpha-1}\frac{\Gamma(q-\alpha+1)\,\Gamma(q+\beta)}{\Gamma(q+\gamma)\,\Gamma(q+1)}(1-x)^{\alpha-q-1},$$

worin wieder wegen des Werthes von q die Entwickelung des Binoms $(1-x)^{\alpha-q-1}$ höchstens α Glieder hat, und wir können dafür schreiben:

$$(1-x)^{\alpha-1}F_\alpha\left(1-\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\frac{1}{1-x}\right)$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\beta)}\sum_{q=0}^{\alpha-1}\sum_{p=0}^{\alpha-1}\frac{\Gamma(q+\beta)\,\Gamma(p+q-\alpha+1)}{\Gamma(q+\gamma)\,\Gamma(q+1)\,\Gamma(p+1)}x^p,$$

was

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{p=0}^{\alpha-1}\frac{\Gamma(p-\alpha+1)}{\Gamma(p+1)}F_\alpha(p-\alpha+1,\,\beta,\,\gamma,\,1)\,x^p$$

gesetzt werden kann, da $p-\alpha+1\leqq 0$ ist; also erhalten wir:

$$(1-x)^{\alpha-1}F_\alpha\left(1-\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\frac{1}{1-x}\right)$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}\sum_{p=0}^{\alpha-1}\frac{\Gamma(p-\alpha+1)\,\Gamma(\gamma+\alpha-p-\beta-1)}{\Gamma(\gamma+\alpha-p-1)\,\Gamma(p+1)}x^p$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma+\alpha-\beta-1)}{\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\gamma+\alpha-1)}F_\alpha(1-\alpha,\,2-\alpha-\gamma,\,\beta-\gamma-\alpha+2,\,x)$$

d. i. x für $1-x$ gesetzt:

$$F_\alpha\left(1-\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\frac{1}{x}\right)$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma+\alpha-\beta-1)}{\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\gamma+\alpha-1)}\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}F_\alpha(1-\alpha,\,2-\alpha-\gamma,\,\beta-\gamma-\alpha+2,\,1-x).\quad \text{IV)}$$

Schlüsse, die den eben gezogenen ganz ähnlich sind, führen uns, wenn wir berücksichtigen, dass β eine beliebige Zahl ist, auf:

$$(1-x)^{-\beta}F_\alpha\left(1-\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\frac{1}{1-x}\right)$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma+\alpha-1)}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Gamma(p+\beta)\,\Gamma(\gamma+\alpha-p-\beta-1)}{\Gamma(\gamma-p-\beta)\,\Gamma(p+1)}x^p$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma+\alpha-\beta-1)}{\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\gamma+\alpha-1)}F(\beta-\gamma+1,\,\beta,\,\beta-\alpha-\gamma+2,\,x),$$

woraus durch Vertauschung von $1-x$ mit x folgt:

$$F_\alpha\left(1-\alpha,\beta,\gamma,\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma+\alpha-\beta-1)}{\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\gamma+\alpha-1)}\,x^\beta\,F(\beta-\gamma+1,\beta,\beta-\alpha-\gamma+2,1-x).\quad\text{V)}$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich:

$$F_\alpha\left(1-\alpha,\beta,\gamma,\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma+\alpha-\beta-1)}{\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\gamma+\alpha-1)}\,x^{\gamma-1}\,F\left(\beta-\gamma+1,2-\alpha-\gamma,\beta-\gamma-\alpha+2,\frac{x-1}{x}\right).\quad\text{VI)}$$

Endlich gelten auch noch:

$$F_\alpha\left(1-\alpha,\beta,\gamma,\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{\Gamma(\beta+\alpha-1)\,\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma+\alpha-1)}\left(-\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}F_\alpha(1-\alpha,2-\alpha-\gamma,2-\alpha-\beta,x)\quad\text{VII)}$$

und:

$$F_\alpha\left(1-\alpha,\beta,\gamma,\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\beta+\alpha-1)}{\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\gamma+\alpha-1)}\,F_\alpha\left(1-\alpha,\beta,\beta-\gamma-\alpha+2,\frac{x-1}{x}\right).$$

Sollte in V) und VI) $\gamma=\beta+1$ sein, so verschwindet das erste Element, gleichzeitig wird aber das dritte negativ $=1-\alpha$. Für diesen Fall erhalten wir auf gleiche Weise, wie II*) und III*) gefunden wurden:

$$F_\alpha\left(1-\alpha,\beta,\beta+1,\frac{1}{x}\right)=x^\beta\,\frac{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha)}\times$$

$$\left\{1-\frac{\Gamma(\beta+\alpha)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\alpha+1)}\,(x-1)^\alpha\,F(\alpha,\beta+\alpha,\alpha+1,1-x)\right\}\quad\text{V*)}$$

und:

$$F_\alpha\left(1-\alpha,\beta,\beta+1,\frac{1}{x}\right)=x^\beta\,\frac{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha)}\times$$

$$\left\{1-\frac{\Gamma(\beta+\alpha)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{x-1}{x}\right)^\alpha F\left(\alpha,1-\beta,\alpha+1,\frac{x-1}{x}\right)\right\}\quad\text{VI*)}$$

5.

Die Anwendung der in den vorigen §§ gefundenen Formeln auf unsere Function

$$(1-x)_n^{-m}=\frac{x^{n-1}\,\Gamma(m+n-1)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}\,F_n\left(1-n,1,2-m-n,\frac{1}{x}\right)\quad 1)$$

giebt:

$$(1-x)_n^{-m}=\frac{(x-1)^{n-1}\,\Gamma(m+n-1)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}\,F_n\left(1-n,1-m-n,2-m-n,\frac{1}{1-x}\right)\text{aus I)}\quad 2)$$

$$(1-x)_n^{-m}=\frac{x^n}{x-1}\,\frac{\Gamma(m+n-1)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}\,F\left(1-m,1,2-m-n,\frac{1}{1-x}\right)\quad\text{aus II)}\quad 3)$$

$$(1-x)_n^{-m} = \frac{x^{m+n-1}}{(x-1)^m} \frac{\Gamma(m+n-1)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)} F\left(1-m,\, 1-m-n,\, 2-m-n,\, \frac{1}{x}\right) \text{ aus III) } \quad 4)$$

$$(1-x)_n^{-m} = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(n)\,\Gamma(m+1)} F_n\,(1-n,\, m,\, m+1,\, 1-x) \quad \text{aus IV) } \quad 5)$$

$$(1-x)_n^{-m} = x^n \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n)} F\,(m+n,\, 1,\, m+1,\, 1-x) \quad \text{aus V) } \quad 6)$$

$$(1-x)_n^{-m} = x^{-m} \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n)} F\left(m+n,\, m,\, m+1,\, \frac{x-1}{x}\right) \text{ aus VI) } \quad 7)$$

$$(1-x)_n^{-m} = F_n\,(1-n,\, m,\, 1-n,\, x) \quad \text{aus VII) } \quad 8)$$

$$(1-x)_n^{-m} = x^{n-1} \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n)} F_n\left(1-n,\, 1,\, m+1,\, \frac{x-1}{x}\right) \text{ aus VIII). } \quad 9)$$

Von den Formeln, die man erhält, wenn man mit denen von diesen 9 Formeln, für die es erlaubt ist, die in I) bis VIII) genannten Transformationen abermals vornimmt, erwähne ich nur die, welche die Anwendung von VIII) auf 2) giebt, nämlich:

$$(1-x)_n^{-m} = (1-x)^{n-1} F_n\left(1-n,\, 1-m-n,\, 1-n,\, \frac{x}{x-1}\right). \quad 10)$$

Die in II*) und III*) ausgesprochenen Relationen, welche auf 8), sowie die in V*) und VI*), die z. B. auf 2) anwendbar sind, lasse ich ausser Acht, da, wie leicht von selbst erhellt, und wie sich auch später zeigen wird, die rechten Seiten der genannten Gleichungen Werthe ergeben, die aus dem Binome $(1-x)^{-m}$ und dem Reste desselben bestehen.

Die aufgestellten 10 Formeln gelten für jedes m; wenn m eine ganze, negative Zahl, also nothwendiger Weise $-m > n$ ist, so ist

$$(-1)^{n-1} \frac{\Gamma(1-m)}{\Gamma(2-m-n)} \quad \text{für} \quad \frac{\Gamma(m+n-1)}{\Gamma(m)}$$

und

$$(-1)^{n-1} \frac{\Gamma(-m)}{\Gamma(1-m-n)} \quad \text{für} \quad \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m+1)}$$

zu setzen.

Die Convergenzbedingungen der rechts stehenden, durch Ffunctionen ausgedrückten unendlichen Reihen folgen alle Mal aus der schon oben gemachten Bemerkung, dass allgemein $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ convergirt, wenn mod. $x < 1$ ist.

Selbstverständlich zerfallen z. B. in 6) und 7), wenn m eine ganze, negative Zahl ist, die rechten Seiten in eine endliche und eine unendliche Reihe (III, 1)).

6.

Die Gleichung 8) des vorigen § haben wir oben (§ 1, 3)) schon direct als Ausdruck für unsere Function gefunden; es können aber auch 3), 6), 9) und 10), und zwar 3) nur für ganze, positive, 6) nur für ganze negative, und 9) und 10) für beliebige m durch Binome ausgedrückt werden.

Unter der angegebenen Voraussetzung giebt 3):

$$(1-x)_n^{-m} = \frac{(-x)^n}{1-x} \cdot \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\Gamma(q-m+1)}{\Gamma(q-m-n+2)} (1-x)^{-q}.$$

Dies ist aber nach § III, 1):

$$= \frac{(-x)^n}{(1-x)\,\Gamma(n)} \left\{ \sum_{q=0}^{m-1} \frac{\Gamma(q-m+1)}{\Gamma(q-m-n+2)} (1-x)^{-q} + \sum_{q=m+n-1}^{\infty} \frac{\Gamma(q-m+1)}{\Gamma(q-m-n+2)} (1-x)^{-q} \right\}$$

Nun erhält man aus Gleichung 1) des vorigen §, wenn man dort x mit $1-x$, und m und n mit einander vertauscht:

$$[1-(1-x)]_m^{-n} = \frac{(1-x)^{m-1}\,\Gamma(m+n-1)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)} F_m\left(1-m,\ 1,\ 2-m-n,\ \frac{1}{1-x}\right)$$

d. i.

$$= \frac{(1-x)^{m-1}(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)} \sum_{q=0}^{m-1} \frac{\Gamma(q-m+1)}{\Gamma(q-m-n+2)} (1-x)^{-q}$$

also wird:

$$\frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{q=0}^{m-1} \frac{\Gamma(q-m+1)}{\Gamma(q-m-n+2)} (1-x)^{-q} = (-1)^{n-1} (1-x)^{1-m} [1-(1-x)]_m^{-n}$$

Ferner ist, wenn $q-m-n+1=p$ gesetzt wird:

$$\sum_{q=m+n-1}^{\infty} \frac{\Gamma(q-m+1)}{\Gamma(q-m-n+2)} (1-x)^{-q} = (1-x)^{-m-n+1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(n)\,\Gamma(p+1)} (1-x)^{-p}$$

d. i.

$$= (-x)^{-n} (1-x)^{1-m}.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die obige Gleichung erhalten wir aus 3) des vorigen §:

$$(1-x)_n^{-m} = (1-x)^{-m} - (1-x)^{-m} x^n (1-\overline{1-x})_m^{-n}. \qquad 1)$$

Die Formel 6) des vorigen § können wir, wenn wir $-m$ für m setzen, wo nun m eine positive, ganze Zahl ist, schreiben:

$$(1-x)_n^m = \frac{x^n}{\Gamma(n)} \left\{ \sum_{q=0}^{m-n} \frac{\Gamma(q-m+n)}{\Gamma(q-m+1)} (1-x)^q + \sum_{q=m}^{\infty} \frac{\Gamma(q-m+n)}{\Gamma(q-m+1)} (1-x)^q \right\}$$

d. i., indem wir im zweiten Theile rechts $p=q-m$ einführen:

$$(1-x)_n^m = \frac{(-1)^{n-1} x^n\,\Gamma(m)}{\Gamma(n)\,\Gamma(m-n+1)} F_{m-n+1}(n-m,\ 1,\ 1-m,\ 1-x)$$
$$+ x^n (1-x)^m (1-\overline{1-x})^{-n}.$$

Nun ist:

$$F_{m-n+1}(n-m,1,1-m,1-x) = 1 + \frac{n-m}{1-m}(1-x)$$
$$+ \frac{(n-m)(n-m+1)}{(1-m)(2-m)}(1-x)^2 + \cdots + \frac{(n-m)\ldots(-2)(-1)}{(1-m)\ldots(-n)}(1-x)^{m-n}$$
d. i.
$$= \frac{\Gamma(m-n+1)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m)}(1-x)^{m-n}\left(1-\frac{1}{1-x}\right)^{-n}_{m-n+1}.$$
Hiernach wird:
$$(1-x)^m_n = (1-x)^m - (-x)^n (1-x)^{m-n}\left(1-\frac{1}{1-x}\right)^{-n}_{m-n+1}. \quad 2)$$

Auf dieselbe Art, wie wir diese Gleichung abgeleitet haben, gelangen wir mit Hülfe von 9) des vorigen § zu:
$$(1-x)^{-m}_n = (1-x)^{n-1}\left(1-\frac{x}{x-1}\right)^{m+n-1}_n \text{*)} \quad 3)$$
eine Relation, die wir auch aus 10) direct erhalten können und später auf andere Weise wiederfinden werden.

1) und 2) gelten für positive ganze m, 3) für beliebige m. In 1) und 2) stellt der zweite Theil rechts den Rest der binomischen Reihe dar.

Schreibt man Gleichung 6) des vorigen § für ganze m:
$$(1-x)^{-m}_n = \frac{x^n}{\Gamma(n)}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\Gamma(q+m+n)}{\Gamma(q+m+1)}(1-x)^q$$
und setzt $q+m=p$, so erhält man:
$$(1-x)^{-m}_n = x^n (1-x)^{-m}\,(1-\overline{1-x})^{-n}$$
wo aber in der Entwickelung von $(1-\overline{1-x})^{-n}$ die m ersten Glieder ausser Acht zu lassen sind.

Die Gleichung 3) des vorigen § giebt, auf gleiche Weise behandelt:
$$(1-x)^{-m}_n = (1-x)^{m-n}(-x)^n\left(1-\frac{1}{1-x}\right)^{-n}$$
wo bei der Entwickelung des letzten Factors die Glieder erst vom $(m-n+1)^{\text{ten}}$ Gliede an Geltung haben.

7.

Wir sind schon in II*) und III*), V*) und VI*) sowie im vorigen § in 1) und 2) auf Restausdrücke für die binomische Reihe geführt worden; wir gehen jetzt daran, für den Rest direct Formeln aufzustellen, um durch Subtraction desselben von $(1-x)^{-m}$ Ausdrücke für $(1-x)^{-m}_n$ zu erhalten.

---

*) cf. Laplace, théorie analytique des probabilités p. 151.

Zur Bestimmung des fraglichen Restes setzen wir:

$$(1-x)^{-m} = (1-x)_n^{-m} + R,$$

wo R den Rest der binomischen Reihe bedeute. Hieraus folgt, wenn $u = R\,(1-x)^m$:

$$u = 1 - (1-x)^m\,(1-x)_n^{-m}$$

d. i.

$$u = 1 - (1-x)^m \left\{ 1 + \frac{m}{1}\,x + \frac{m\,(m+1)}{1.\,2}\,x^2 + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{m\,(m+1)\ldots(m+n-2)}{(n-1)!}\,x^{n-1} \right\}$$

Durch Differentiation nach x folgt:

$$\frac{du}{dx} = m\,(1-x)^{m-1} \left\{ 1 + \frac{m}{1}\,x + \cdots + \frac{m\,(m+1)\ldots(m+n-2)}{(n-1)!}\,x^{n-1} \right.$$
$$\left. - (1-x) \left[1 + \frac{m+1}{1}\,x + \cdots + \frac{(m+1)\ldots(m+n-2)}{(n-2)!}\,x^{n-1} \right] \right\}$$

Führt man die rechts innerhalb der Parenthese angegebene Multiplication aus, so erhält man nach gehöriger Reduction:

$$\frac{du}{dx} = m\,(1-x)^{m-1}\,\frac{(m+1)\,(m+2)\ldots(m+n-2)}{(n-2)!}\left(1 + \frac{m}{n-1}\right)x^{n-1}$$

d. i.

$$= (1-x)^{m-1}\,\frac{m\,(m+1)\ldots(m+n-1)}{(n-1)!}\,x^{n-1}.$$

Integriren wir nach x, indem wir die Integrationsgrenzen so bestimmen, dass die zu integrirende Function für die untere Grenze verschwindet, so wird:

$$u = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)} \int_0^x (1-x)^{m-1}\,x^{n-1}\,dx,$$

also nach dem obigen Werthe von u:

$$R = (1-x)^{-m}.\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)} \int_0^x (1-x)^{m-1}\,x^{n-1}\,dx, \tag{1}$$

also:

$$(1-x)_n^{-m} = (1-x)^{-m} \left\{ 1 - \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)} \int_0^x (1-x)^{m-1}\,x^{n-1}\,dx \right\} \tag{2}$$

Setzen wir in der Integralfunction u für x und dann $u = vx$, so folgt:

$$\int_0^x (1-u)^{m-1}\,u^{n-1}\,du = x^n \int_0^1 (1-vx)^{m-1}\,v^{n-1}\,dv. \tag{3}$$

Nun ist:

$$\int_0^1 (1-vx)^{m-1}\,v^{n-1}\,dv = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m)\,(-x)^q}{\Gamma(m-q)\,\Gamma(q+1)} \int_0^1 v^{n+q-1}\,dv$$

d. i.

$$= \Gamma(m) \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+q)\,(-x)^q}{\Gamma(m-q)\,\Gamma(n+q+1)\,\Gamma(q+1)}$$

also:

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1)} F(1-m,\, n,\, n+1,\, x)$$

folglich wird:

$$\int_0^x (1-u)^{m-1} u^{n-1}\, du = \frac{x^n}{n} F(1-m,\, n,\, n+1,\, x). \qquad 4)$$

Hierin drückt die Ffunction im Allgemeinen eine unendliche Reihe aus, die für mod $x < 1$ convergirt und nur, wenn m eine ganze positive Zahl ist, eine endliche ist. Wir können sonach die in den §§ 2 und 3 angegebenen Euler'schen Transformationsformeln auf sie anwenden, wodurch wir erhalten:

$$\int_0^x (1-u)^{m-1} u^{n-1}\, dx = \frac{x^n}{n} (1-x)^{m-1} F\left(1,\, 1-m,\, n+1,\, \frac{x}{x-1}\right)$$

$$\int_0^\infty (1-u)^{m-1} u^{n-1}\, dx = \frac{x^n}{n} (1-x)^{-n} F\left(n,\, m+n,\, n+1,\, \frac{x}{x-1}\right)$$

und:

$$\int_0^\infty (1-u)^{m-1} u^{n-1}\, dx = \frac{x^n}{n} (1-x)^{m} F(1,\, m+n,\, n+1,\, x).$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in Gleichung 2) kommt:

$$(1-x)_n^{-m} = (1-x)^{-m} - x^n \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n+1)} (1-x)^{-m} F(1-m,\, n,\, n+1,\, x) \qquad 5)$$

$$(1-x)_n^{-m} = (1-x)^{-m} - x^n \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n+1)} (1-x)^{-m-n} F\left(m+n,\, n,\, n+1,\, \frac{x}{x-1}\right) \qquad 6)$$

$$(1-x)_n^{-m} = (1-x)^{-m} - \frac{x^n}{1-x} \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n+1)} F\left(1-m,\, 1,\, n+1,\, \frac{x}{x-1}\right) \qquad 7)$$

$$(1-x)_n^{-m} = (1-x)^{-m} - x^n \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n+1)} F(m+n,\, 1,\, n+1,\, x). \qquad 8)$$

Dieses letzte Resultat ergiebt sich auch direct aus der Betrachtung des Restes R; denn es ist:

$$R = \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!} x^n + \frac{m(m+1)\ldots(m+n)}{(n+1)!} x^{n+1} + \ldots.$$

$$= x^n \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n+1)} F(m+n,\, 1,\, n+1,\, x)$$

übereinstimmend mit 8).

In den in den Gleichungen 5) bis 8) vorkommenden Ffunctionen sind die zweiten und dritten Elemente stets positive, ganze Zahlen; die Entwickelung derselben giebt daher stets nur eine endliche oder

2

unendliche Reihe. 5) und 6) konnten auch durch Anwendung von II*) und III*) auf Formel 8) in § 5 gefunden werden. Die rechten Seiten in 5) und 7) stellen für ganze positive, in 6) und 8) für ganze negative m endliche Reihen dar und zwar giebt unter diesen Voraussetzungen nach unserer Bezeichnungsweise Formel 7)

$$(1-x)_n^{-m} = (1-x)^{-m} - x^{m+n-1}(1-x)^{-m}\left(1-\frac{x-1}{x}\right)_m^{m+n-1} \qquad 7^*)$$

während wir aus 8) für ganze positive m erhalten:

$$(1-x)_n^m = (1-x)^m - (-x)^m\left(1-\frac{1}{x}\right)_{m-n+1}^m \qquad 8^*)$$

8.

Die im vorigen § gefundenen Restausdrücke können dadurch eine grosse Vermehrung finden, dass wir die oben angegebenen, für ganze, negative erste Elemente geltenden Transformationsformeln I) bis VIII) für die Fälle, wo m eine ganze, positive Zahl ist, auf 5) und 7), wenn m eine ganze, negative Zahl ist, auf 6) und 8) anwenden, indem in den obigen Formeln bezüglich $1-m$ oder $n-m$ für $1-\alpha$ gesetzt wird.

Zur Transformation von 5) und 6) sind anstatt V) und VI) die Formeln V*) und VI*) zu gebrauchen. Wir erhalten auf diese Weise eine grosse Anzahl neuer Ausdrücke für $(1-x)_n^{-m}$, die, wenn die Γfunctionen durch Binome ausgedrückt werden, uns wieder auf frühere Formeln führen, z. B. auf 1) und 2) in § 6, auf 8*) in § 7 u. s. w.

Indem ich die Ableitungen derselben übergehe, gebe ich nur noch an, auf welche Weise wir aus der § 7, 1) angegebenen Restformel zu dem Laplace'schen Ausdrucke § 6, 3) gelangen. Wir können nämlich für:

$$(1-x)_n^{-m} = (1-x)^{-m}\left\{1-\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}\int_0^x (1-u)^{m-1}u^{n-1}\,du\right\}$$

auch schreiben:

$$(1-x)_n^{-m} = (1-x)^{-m}\left\{1-\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}\left[\int_0^1 (1-u)^{m-1}u^{n-1}\,du - \int_x^1 (1-u)^{m-1}u^{n-1}\,du\right]\right\}$$

Nun ist das erste Integral rechts das Euler'sche Integral erster Gattung, also

$$= \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)},$$

folglich wird:

$$(1-x)_n^{-m} = (1-x)^{-m} \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)} \int_x^1 (1-u)^{m-1}\, u^{n-1}\, du$$

oder für:

$$\frac{1-u}{1-x} = v$$

$$(1-x)_n^{-m} = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)} \int_0^1 v^{m-1}\,[1 - v\,(1-x)]^{n-1}\, dv \qquad 1)$$

d. i.

$$= \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)} (1-x)^{n-1} \int_0^1 v^{m-1}\,(1-v)^{n-1} \left(1 + \frac{x}{(1-x)\,(1-v)}\right)^{n-1} dv$$

woraus durch Entwickelung des zweiten Binoms unter dem Integralzeichen folgt:

$$(1-x)_n^{-m} =$$

$$\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)} (1-x)^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-q)\,\Gamma(q+1)} \left(\frac{x}{1-x}\right)^q \int_0^1 v^{m-1}\,(1-v)^{n-q-1}\, dv.$$

Da das Integral aber wieder ein Euler'sches Integral erster Gattung ist, so erhalten wir:

$$(1-x)_n^{-m} = (1-x)^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m+n-q)\,\Gamma(q+1)} \left(\frac{x}{1-x}\right)^q$$

d. i. nach unserer Bezeichnungsweise:

$$(1-x)_n^{-m} = (1-x)^{n-1} \left(1 - \frac{x}{x-1}\right)_n^{m+n-1} \qquad 2)$$

wie oben § 7.

9.

Die vorletzte Gleichung des vorigen §:

$$(1-x)_n^{-m} = (1-x)^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\Gamma(m+n)\,(-1)^q}{\Gamma(m+n-q)\,\Gamma(q+1)} \left(\frac{x}{x-1}\right)^q$$

kann auch geschrieben werden:

$$(1-x)_n^{-m} = x^{n-1}\,\Gamma(m+n) \sum_{q=0}^{n-1} \frac{(-1)^{q-n+1}}{\Gamma(m+n-q)\,\Gamma(q+1)} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{q-n+1}.$$

Setzt man nun $q - n + 1 = -p$, so bleiben die Summationsgrenzen dieselben und man erhält:

$$(1-x)_n^{-m} = x^{n-1}\,\Gamma(m+n) \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p}{\Gamma(p+m+1)\,\Gamma(n-p)} \left(\frac{x-1}{x}\right)^p$$

d. i.

$$= x^{n-1} \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n)} F_n\left(1-n,\,1,\,m+1,\,\frac{x-1}{x}\right)$$

eine Gleichung, die mit 9) in § 5 übereinstimmt und die man auch aus

$$(1-x)_n^{-m} = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)} \int_0^1 v^{m-1}\,(1-v\,(1-x))^{n-1}\,dv$$

direct findet, wenn man $v = 1 - u$ setzt, in dem so entstehenden Integrale

$$x^{n-1} \int_0^1 (1-u)^{m-1} \left(1 - \frac{x-1}{x}\,u\right)^{n-1} du$$

das zweite Binom entwickelt, die Integration ausführt u. s. w.

Der eben für $(1-x)_n^{-m}$ angegebene Werth (cf. § 8, 1)) giebt aber auch durch Entwickelung des rechts stehenden Binoms:

$$(1-x)_n^{-m} = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n)\,(-1)^q}{\Gamma(n-q)\,\Gamma(q+1)}\,(1-x)^q \int_0^1 v^{m+q-1}\,dv\,,$$

woraus durch Ausführung der Integration folgt:

$$(1-x)_n^{-m} = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\Gamma(m+q)\,(-1)^q}{\Gamma(m+q+1)\,\Gamma(n-q)\,\Gamma(q+1)}\,(1-x)^q$$

d. i.

$$= \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n)} F_n\,(1-n,\,m,\,m+1,\,1-x) \qquad \text{s. § 5, 5).}$$

Endlich giebt Gleichung 1) des vorigen § auch:

$$(1-x)_n^{-m} = (x-1)^{n-1} \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)} \int_0^1 v^{m+n-2} \left(1 - \frac{1}{(1-x)\,v}\right)^{n-1} dv$$

und man gelangt durch Entwickelung und Summation des Binoms unter dem Integralzeichen zu:

$$(1-x)_n^{-m} = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)} (x-1)^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\Gamma(m+n-q-1)\,(-1)^q}{\Gamma(m+n-q)\,\Gamma(n-q)\,\Gamma(q+1)} \left(\frac{1}{1-x}\right)^q$$

d. i.

$$= (x-1)^{n-1} \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)} F_n\left(1-n,\,1-m-n,\,2-m-n,\,\frac{1}{1-x}\right)$$

wie § 5, 2). Diese Gleichung folgt auch aus der vorigen, indem man in

$$\sum_{q=0}^{n-1} \frac{\Gamma(m+q)\,(-1)^q}{\Gamma(m+q+1)\,\Gamma(n-q)\,\Gamma(q+1)}\,(1-x)^q$$

$q = n - p - 1$ setzt, so wie sich überhaupt die angegebenen Formeln leicht auf einander reduciren lassen.

10.

Es soll nun auf eine von der bisherigen ganz abweichende Weise, nämlich durch Aufstellung einer Differentialgleichung für $(1-x)_n^{-m}$, die später zu einer Kettenbruchsentwickelung benutzt werden wird, und durch nachherige Integration Gleichung 2) § 7 abgeleitet werden.

Setzt man nämlich in:

$$\sum_{q=0}^{n-1} s_{q-1}\left(l_{q-1} - l_q \frac{s_q}{s_{q-1}}\right) = l_{-1}\, s_{-1} - l_{n-1}\, s_{n-1}$$

$$s_q = \frac{\Gamma(m+n-q-1)}{\Gamma(n-q)} \left(\frac{1}{x}\right)^q$$

also:

$$s_{q-1} = \frac{\Gamma(m+n-q)}{\Gamma(n-q+1)} \left(\frac{1}{x}\right)^{q-1}, \quad s_{-1} = x\,\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(n+1)}, \quad s_{n-1} = \frac{\Gamma(m)}{x^{n-1}}$$

und ist ferner

$$l_q = m+n-q-1$$

folglich:

$$l_{q-1} = m+n-q, \quad l_{-1} = m+n, \quad l_{n-1} = m$$

so ergiebt sich:

$$\sum_{q=0}^{n-1} \frac{\Gamma(m+n-q)}{\Gamma(n-q+1)} \left(\frac{1}{x}\right)^{q-1} \left(m+n-q-\frac{n-q}{x}\right)$$
$$= \frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(n+1)}\, x - \frac{\Gamma(m+1)}{x^{n-1}}$$

d. i. da:

$$m+n-q-\frac{n-q}{x} = \frac{(n-q)(x-1)+mx}{x}$$

$$(x-1)\sum_{q=0}^{n-1} \frac{\Gamma(m+n-q)}{\Gamma(n-q)} \left(\frac{1}{x}\right)^q + m \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\Gamma(m+n-q)}{\Gamma(n-q+1)} \left(\frac{1}{x}\right)^{q-1}$$
$$= \frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(n+1)}\, x - \frac{\Gamma(m+1)}{x^{n-1}}$$

oder:

$$\frac{x-1}{\Gamma(m+1)} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\Gamma(m+n-q)}{\Gamma(n-q)}\, x^{n-q-1} + \frac{1}{\Gamma(m)} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\Gamma(m+n-q)}{\Gamma(n-q+1)}\, x^{n-q} + 1$$
$$= x^n \frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+1)} \qquad 1)$$

Nun ist:

$$\sum_{q=0}^{n-1} \frac{\Gamma(m+n-q)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n-q)}\, x^{n-q} + 1 = (1-x)_{n+1}^{-m}\,.$$

Ferner haben wir am Anfange von § 1 gefunden:

$$(1-x)_n^{-m} = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\Gamma(m+n-q-1)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n-q)}\, x^{n-q-1}$$

folglich ist, $m+1$ für m gesetzt:

$$(1-x)_n^{-(m+1)} = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\Gamma(m+n-q)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n-q)}\, x^{n-q-1}.$$

Durch Substitution dieser Werthe in 1) folgt:

$$(x-1)(1-x)_n^{-(m+1)} + (1-x)_{n+1}^{-m} = x^n \frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+1)}$$

oder n mit $n-1$ vertauscht:

$$(1-x)_n^{-m} - (1-x)(1-x)_{n-1}^{-(m+1)} = x^{n-1} \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n)} \qquad 2)$$

andererseits ist aber

$$\frac{d\,(1-x)_n^{-m}}{dx} = m + \frac{m(m+1)}{1}\, x + \cdots + \frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{(n-2)!}\, x^{n-2}$$

d. i.

$$= m\,(1-x)_{n-1}^{-(m+1)}$$

so erhalten wir aus 2), wenn wir zur Abkürzung

$$(1-x)_n^{-m} = y, \quad \frac{d\,(1-x)_n^{-m}}{dx} = y'$$

und

$$\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n)} = a_n$$

setzen:

$$m\,y - (1-x)\,y' = a_n\, x^{n-1} \qquad 3)$$

oder:

$$y' - \frac{m}{1-x}\, y + a_n \frac{x^{n-1}}{x-1} = 0. \qquad 3^*)$$

Nun ist bekanntlich, wenn

$$y' + A_x\, y + B_x = 0,$$

wo A_x und B_x Functionen von x sind, die Auflösung hiervon enthalten in

$$y = \left(e^{-\int A_x\, dx}\right)\left(C - \int B_x\, e^{\int A_x\, dx}\, dx\right)$$

wo C eine Integrationsconstante ist.

In unserem Falle ist:

$$A_x = -\frac{m}{1-x}, \quad B_x = a_n \frac{x^{n-1}}{1-x}$$

also:

$$\int A_x\, dx = m lg\,(1-x) - lg c = m lg\left(\frac{1-x}{c}\right)$$

wenn $-\,lg c$ die Integrationsconstante ist. Folglich wird:

$$y = e^{-m lg\left(\frac{1-x}{c}\right)}\left(C - a_n \int \frac{x^{n-1}}{1-x}\, e^{m lg\left(\frac{1-x}{c}\right)}\, dx\right)$$

d. i.

$$y = \left(\frac{1-x}{c}\right)^{-m} C - a_n\,(1-x)^{-m} \int x^{n-1}\,(1-x)^{m-1}\, dx.$$

Da nun in unserem Falle $y = 1$ für $x = 0$, so folgt $C = c^{-m}$ und wir erhalten, indem wir für a_n und y wieder ihre Werthe einführen:

$$(1-x)_n^{-m} = (1-x)^{-m} - \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}\,(1-x)^{-m}\int_0^x x^{n-1}\,(1-x)^{m-1}\,dx \quad 4)$$

übereinstimmend mit § 7, 2).

11.

Die im vorigen § gefundene Differentialgleichung führt auf eine, wenn auch zu numerischen Berechnungen nicht zu verwendende, aber im Uebrigen wohl nicht uninteressante Entwickelung unserer Function $(1-x)_n^{-m}$ in einen Kettenbruch.

Die Gleichung 2) des vorigen § lautete:

$$(1-x)_n^{-m} - (1-x)\,(1-x)_{n-1}^{-(m+1)} = x^{n-1}\,\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n)}\,.$$

Hieraus folgt, indem gleichzeitig m mit $m+1$, und n mit $n+1$ vertauscht wird:

$$(1-x)_{n-1}^{-(m+1)} - (1-x)\,(1-x)_{n-2}^{-(m+2)} = x^{n-2}\,\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m+2)\,\Gamma(n-1)}\,;$$

ebenso folgt weiter

$$(1-x)_{n-2}^{-(m+2)} - (1-x)\,(1-x)_{n-3}^{-(m+3)} = x^{n-3}\,\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m+3)\,\Gamma(n-2)}\,.$$

Fährt man so fort, so gelangt man endlich auf:

$$(1-x)_2^{-(m+n-2)} - (1-x)\,(1-x)_1^{-(m+n-1)} = x\,\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m+n-1)\,\Gamma(2)}$$

und

$$(1-x)_1^{-(m+n-1)} = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m+n)\,\Gamma(1)} = 1.$$

Andererseits folgt aber:

$$\frac{d\,(1-x)_n^{-m}}{dx} = m\,(1-x)_{n-1}^{-(m+1)}$$

$$\frac{d^2\,(1-x)_n^{-m}}{dx^2} = m\,(m+1)\,(1-x)_{n-2}^{-(m+2)}$$

$$\frac{d^3\,(1-x)_n^{-m}}{dx^3} = m\,(m+1)\,(m+2)\,(1-x)_{n-3}^{-(m+3)} \quad \text{u. s. w.}$$

endlich:

$$\frac{d^{n-2}\,(1-x)_n^{-m}}{dx^{n-2}} = m\,(m+1)\,\ldots\,(m+n-3)\,(1-x)_2^{-(m+n-2)}$$

und:

$$\frac{d^{n-1}\,(1-x)_n^{-m}}{dx^{n-1}} = m\,(m+1)\,\ldots\,(m+n-2)\,(1-x)_1^{-(m+n-1)}\,.$$

Hiernach erhalten wir, indem wir $y, y', y'' \ldots$ für unsere Function $(1-x)_n^{-m}$ und ihre Derivirten schreiben:

$$y - \frac{1-x}{m} y' = x^{n-1} \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n)}$$

$$\frac{y'}{m} - (1-x)\frac{y''}{m(m+1)} = x^{n-2} \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m+2)\,\Gamma(n-1)}$$

$$\frac{y''}{m(m+1)} - (1-x)\frac{y'''}{m(m+1)(m+2)} = x^{n-3} \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m+3)\,\Gamma(n-2)}$$

u. s. w.

$$\frac{y^{(n-2)}}{m(m+1)\ldots(m+n-3)} - (1-x)\frac{y^{(n-1)}}{m(m+1)\ldots(m+n-2)}$$
$$= x \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m+n-1)\,\Gamma(2)}$$

$$\frac{y^{(n-1)}}{m(m+1)\ldots(m+n-2)} = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m+n)\,\Gamma(1)} = 1.$$

Dies ist, wenn wir

$$\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)},\quad \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n-1)},\quad \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n-2)}\quad \text{u. s. w.}$$

bezüglich mit

$$a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2}\ \text{u. s. w.}$$

bezeichnen:

$$\begin{aligned}
my - (1-x)\,y' &= a_n\, x^{n-1} \\
(m+1)\,y' - (1-x)\,y'' &= a_{n-1}\, x^{n-2} \\
(m+2)\,y'' - (1-x)\,y''' &= a_{n-2}\, x^{n-3} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
(m+n-2)\,y^{(n-2)} - (1-x)\,y^{(n-1)} &= a_2\, x \\
y^{(n-1)} &= a_1\,.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$y = \frac{a_n\, x^{n-1}}{m} + \frac{1-x}{m\,\frac{1}{y'}}$$

$$\frac{1}{y'} = \frac{m+1}{a_{n-1}\, x^{n-2} + (1-x)\,y''}$$

$$y'' = \frac{a_{n-2}\, x^{n-3}}{m+2} + \frac{1-x}{(m+2)\,\frac{1}{y'''}}$$

$$\frac{1}{y'''} = \frac{(m+3)}{a_{n-3}\, x^{n-4} + (1-x)\,y^{(4)}}$$

u. s. w.

Durch successive Substitution erhalten wir:

$$y = \frac{a_n}{m} x^{n-1} + \cfrac{\cfrac{1-x}{m(m+1)}}{a_{n-1}\, x^{n-2} + \cfrac{(1-x)\,a_{n-2}\, x^{n-3}}{m+2} + \cfrac{\cfrac{(1-x)^2}{(m+2)(m+3)}}{a_{n-3}\, x^{n-4} + \cfrac{(1-x)\,a_{n-4}\, x^{n-5}}{m+4} + \cdots}}$$

oder, indem wir

$$b_0 = \frac{a_n}{m}$$

$$b_1 = \frac{1}{m(m+1)} \qquad b_2 = \frac{a_{n-2}}{m+2}$$

$$b_3 = \frac{1}{(m+2)(m+3)} \qquad b_4 = \frac{a_{n-4}}{m+4}$$

u. s. w.

$$b_{2p+1} = \frac{1}{(m+2p)(m+2p+1)}, \quad b_{2p+2} = \frac{a_{n-2p-2}}{m+2p+2}$$

setzen:

$$y = b_0 + \cfrac{(1-x)\, b_1}{a_{n-1}\, x^{n-2} + (1-x)\, b_2\, x^{n-3} + \cfrac{(1-x)^2\, b_3}{a^{n-3}\, x^{n-4} + (1-x)\, b_4\, x^{n-5} + \cfrac{(1-x)^2\, b_5}{a_{n-5}\, x^{n-5} + \cdots}}}$$

Das Schlussglied wird:

wenn n grade $= 2r+2$

$$\cfrac{(1-x)^2\, b_{2r-1}}{a_2\, x^2 + (1-x)\, b_{2r}\, x + \cfrac{(1-x)^2\, b_{2r+1}}{a_1}}$$

wenn n ungrade $= 2r+1$

$$\frac{(1-x)^2\, b_{2r-1}}{a_2\, x + (1-x)\, b_{2r}}.$$

Ohne grosse Mühe lässt sich mit Hülfe der angegebenen Differentialgleichung der logarithmische Differentialquotient $\frac{y'}{y}$ in einen Kettenbruch entwickeln, jedoch hat dies für die Berechnung von $(1-x)_n^{-m}$ keinen Werth.

12.

Als Nachtrag zu § 3 und 4 bemerke ich noch, dass wir, eben so wie wir die rechten Seiten in I) und II) einander gleich setzten und dadurch III) erhielten, auf gleiche Weise mit I) und den übrigen Transformationsformeln verfahren können. So folgt z. B. aus I) und V):

$$\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\alpha-1} F_\alpha\left(1-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ \frac{1}{1-x}\right)$$

$$= x^\beta \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma+\alpha-\beta-1)}{\Gamma(\gamma+\alpha-1)\,\Gamma(\gamma-\beta)} F(\beta-\gamma+1,\ \beta,\ \beta-\alpha-\gamma+2,\ 1-x).$$

Setzen wir hierin $\gamma-\beta$ für β und x für $1-x$, so folgt:

$$F_\alpha\left(1-\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \frac{1}{x}\right)$$

$$= (1-x)^{\gamma+\alpha-\beta-1}\left(-\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\gamma+\alpha-1)\,\Gamma(\beta)} F(1-\beta, \gamma-\beta, 2-\alpha-\beta, x). \quad \text{IX)}$$

Ferner geben I) und VI) durch Gleichsetzung:

$$\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\alpha-1} F_\alpha\left(1-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\frac{1}{1-x}\right)=x^{\gamma-1}\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma+\alpha-\beta-1)}{\Gamma(\gamma+\alpha-1)\,\Gamma(\gamma-\beta)}\times$$
$$F\left(\beta-\gamma+1,\,2-\alpha-\gamma,\,\beta-\gamma-\alpha+2,\,\frac{x-1}{x}\right)$$

woraus wir, auf gleiche Weise wie IX), erhalten:

$$F_\alpha\left(1-\alpha,\beta,\gamma,\frac{1}{x}\right)=$$
$$(1-x)^{\gamma+\alpha-2}\left(-\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\gamma+\alpha-1)\,\Gamma(\beta)}F\left(1-\beta,2-\alpha-\gamma,2-\alpha-\beta,\frac{x}{x-1}\right)\quad \text{X)}$$

Auf gleiche Weise gelangen wir mit Hülfe von I) und VIII) auf:

$$F_\alpha\left(1-\alpha,\beta,\gamma,\frac{1}{x}\right)$$
$$=\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\alpha-1}\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\gamma+\alpha-1)\,\Gamma(\beta)}F_\alpha\left(1-\alpha,\gamma-\beta,2-\alpha-\beta,\frac{x}{x-1}\right)\quad \text{XI)}$$

Für $\beta=1$ wird nach § 3 aus der Ffunction der rechten Seite in IX):

$$1-\frac{\Gamma(\gamma+\alpha-1)}{\Gamma(\alpha+1)}(-x)^\alpha F(\alpha,\gamma+\alpha-1,\alpha+1,x)\qquad \text{IX*)}$$

und in X):

$$1-\frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha F\left(\alpha,2-\gamma,\alpha+1,\frac{x}{x-1}\right)\qquad \text{X*)}$$

welche letztere Formeln wieder auf Restformeln führen, die mit denen in § 7 übereinstimmen.

Die Gleichung XI) giebt, auf unsere Function angewendet, den in 10) § 5 angegebenen Werth.

Wir erhalten sonach durch IX), X) und XI) keine neuen Relationen.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung nun ist die Kenntniss des Werthes der n ersten Glieder der binomischen Reihe für den Fall von Wichtigkeit, dass das Binom die Form $(a+b)^m$ hat, worin $a+b=1$ und m eine ganze positive Zahl ist. Hiernach werden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung vor allen die Formeln § 7, 8*) und § 6, 2) und 3), die für ganze positive m gelten, ihre Anwendung finden.

Nun ist:

$$a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m_n=(a+b)^m_n\,.$$

Setzen wir also in den genannten Formeln $x=-\frac{b}{a}$ und multipliciren beide Seiten mit a^m, so erhalten wir aus § 7, 8*):

$$(a+b)^m_n=(a+b)^m-(a+b)^m_{m-n+1}$$

aus § 6, 2):

$$(a+b)^m_n=(a+b)^m-(a+b)^{m-n}\,b^n\left(1-\frac{a}{a+b}\right)^{-n}_{m-n+1}$$

aus § 6, 3):

$$(a+b)_n^m = a^{m-n}\,(a+b)^n\left(1-\frac{b}{a+b}\right)_n^{-(m-n+1)}$$

Hieraus ergeben sich für $a+b=1$ die drei Formeln:

$$(a+b)_n^m = 1-(b+a)_{m-n+1}^m$$

$$(a+b)_n^m = 1-b^n\,(1-a)_{m-n+1}^{-n}$$

$$(a+b)_n^m = a^{m-n}\,(1-b)_n^{-(m-n+1)}$$

von welchen Formeln die zweite am brauchbarsten für die Wahrscheinlichkeitsrechnung sein dürfte.

Dr. phil. **A. G. Hering.**